TRƯỜNG THPT NGUYỄN HUỆ
TỔ TOÁN

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG 2023 - 2024
Môn: TOÁN – Khối: 11
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$.

Câu 2. (5 điểm)

a) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $a^2 + 3b^2 + 2c^2 = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = 2(a+b+c) - abc$.

b) Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c \geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$L = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}.$$

Câu 3. (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

$f(x+y) = f(x) + y \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2} \ \ \forall x \neq 0$.

Câu 4. (5 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy; cho tam giác ABC. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ là $I(4;0)$, trọng tâm tam giác ABC có tọa độ là $G\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng $d : 2x + y - 1 = 0$ và điểm $M(4;2)$ là chân đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC ($M \in AC$).

---------- HẾT ----------

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG MÔN TOÁN 11 NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1

a) Giải phương trình $2x-x^2+\sqrt{6x^2-12x+7}=0$. Đặt $T=\sqrt{6x^2-12x+7}, T\geq 0$

$\Rightarrow T^2=6x^2-12x+7=-6(2x-x^2)+7\Rightarrow 2x-x^2=\dfrac{T^2-7}{-6}$. Thay vào PT trên ta được

$\dfrac{T^2-7}{-6}+T=0\Leftrightarrow T^2-6T-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T=-1(L) \\ T=7 \end{array}\right.$

Với $T=7\Rightarrow 6x^2-12x+7=7^2\Leftrightarrow x^2-2x-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-2\sqrt{2} \\ x=1+2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Kết luận PT trên có 2 nghiệm là $x=1-2\sqrt{2}, x=1+2\sqrt{2}$.

3

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x(x+y+1)+y(y+1)=2 \end{cases}$.

Hệ trên $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=4 \\ (x+y)^2-xy+x+y=2 \end{cases}$. Đặt $S=x+y, P=xy$ ta được

$\begin{cases} S^2-2P+S=4 \\ S^2-P+S=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} S=0 \\ P=-2 \end{cases}; \begin{cases} S=-1 \\ P=-2 \end{cases}$

$+\begin{cases} S=0 \\ P=-2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

$+\begin{cases} S=-1 \\ P=-2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

Kết luận PT trên có 4N là $(\sqrt{2};-\sqrt{2}),(-\sqrt{2};\sqrt{2}),(1;-2),(-2;1)$.

3

Câu 2

a) Với bốn số *a, b, x, y* bất kỳ, ta có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:
$(ax+by)^2\leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức (1), ta có

$H^2=\left[a(2-bc)+\sqrt{2}.\sqrt{2}(b+c)\right]^2\leq (a^2+2).\left[(2-bc)^2+2(b+c)^2\right]=(a^2+2).(b^2+2).(c^2+2)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)=\dfrac{1}{6}(a^2+2).3(b^2+2).2(c^2+2)$

$\leq \dfrac{1}{6}\left[\dfrac{(a^2+2)+3(b^2+2)+2(c^2+2)}{3}\right]^3=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a^2+3b^2+2c^2+12}{3}\right)^3=36$

Từ đó suy ra $H^2\leq 36$. Suy ra $-6\leq H\leq 6$.

	Mặt khác với $a=2$, $b=0$, $c=1$ thì $a^2+3b^2+2c^2=6$ và $H=6$. Với $a=-2$, $b=0$, $c=-1$ thì $a^2+3b^2+2c^2=6$ và $H=-6$ Vậy $MinH=-6$ khi $a=-2$, $b=0$, $c=-1$. $MaxH=6$ khi $a=2$, $b=0$, $c=1$. b) Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $a+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4\Rightarrow\frac{3}{4}\left(a+\frac{4}{a}\right)\geq 3,$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2$ $b+\frac{9}{b}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{9}{b}}=6\Rightarrow\frac{1}{2}\left(b+\frac{9}{b}\right)\geq 3,$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=3$ $c+\frac{16}{c}\geq 2\sqrt{c\cdot\frac{16}{c}}=8\Rightarrow\frac{1}{4}\left(c+\frac{16}{c}\right)\geq 2,$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=4$ Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều, thu được $\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 8$ (1) Mặt khác, do $a+2b+3c\geq 20$ nên $\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}\geq 5$ (chia hai vế cho 4) (2) Cộng (1) và (2), vế đối vế, ta được $L=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 13.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=3,c=4.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức L bằng 13, đạt được khi $a=2,b=3,c=4.$	3 2
Câu 3	Ta có: $f(x+y)=f(x)+y\Rightarrow f(y)=f(0)+y\ \forall y\in\mathbb{R}.\Rightarrow f(x)=a+x$ với $a=f(0)$. $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{x}\ \forall x\neq 0.$ Mặt khác $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2}=\frac{f(0)+x}{x^2}=\frac{a+x}{x^2}\ \forall x\neq 0$. $\Rightarrow a+\frac{1}{x}=\frac{a+x}{x^2}\ \forall x\neq 0\Leftrightarrow ax^2=a\ \forall x\neq 0\Leftrightarrow a=0.$ Vậy $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}.$	4

Câu 4	Ta biết $\overrightarrow{IH}=3.\overrightarrow{IG}$ (H là trực tâm tam giác ABC) Suy ra $H(3;1)\Rightarrow pt\ MH:\dfrac{x-4}{3-4}=\dfrac{y-2}{1-2}\Leftrightarrow x-y-2=0$. Do B là giao của (d) và đường thẳng MH nên tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y-2=0\\2x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow B(1;-1)$. Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó $\overrightarrow{BN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BG}\Rightarrow N(5;1)$ $\overrightarrow{MN}=(1;-1)$ $\overrightarrow{n_{AC}}=(1;1)$ Ta có $pt\ AC:1(x-5)+1.(y-1)=0\Leftrightarrow x+y-6=0$. Do A thuộc đường thẳng AC nên $A(t;6-t)$, kết hợp với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA^2=IB^2\Leftrightarrow(t-4)^2+(6-t)^2=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=7\end{array}\right.$ +) Với $t=3\Rightarrow A(3;3),C(7;-1)$ +) Với $t=7\Rightarrow A(7;-1),C(3;3)$ Vậy $A(3;3),B(1;-1),C(7;-1)$ hoặc $A(7;-1),B(1;-1),C(3;3)$.	5

Chú ý: Các cách làm khác của học sinh đúng: cho đủ số điểm.