

Câu 1 (4 điểm). Cho hàm số $y = -x^2 + 2(m + 1)x + 1 - m^2$ (m là tham số).

a) Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác KAB vuông tại K, trong đó $K(2; -2)$.

b) Tìm giá trị của m để hàm số (1) có giá trị lớn nhất bằng 6.

Câu 2 (6 điểm).

a) Giải phương trình: $\frac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{3x^2 - 3}} = 2x + 3$

b) Tìm m để phương trình: $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = m$ có nghiệm.

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 9(\sqrt{3x + y + 3} - \sqrt{2x + y}) = y + 5 \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \end{cases}$$

Câu 3 (6 điểm).

a) Cho ΔABC và hai điểm M, N thay đổi sao cho: $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định.

b) Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{1}{4}$. Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Chứng minh rằng: $\cot A + \cot B + \cot C = a^2 + b^2 + c^2$.

c) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(1; 2) và B(4; 3). Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho góc $\widehat{AMB}$ bằng 45° .

Câu 4 (2 điểm). Một chủ hộ kinh doanh có 32 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2.000.000đ/1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên 200.000đ/1 tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh sẽ cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

Câu 5 (2 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2020}{xy + yz + zx}$.

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

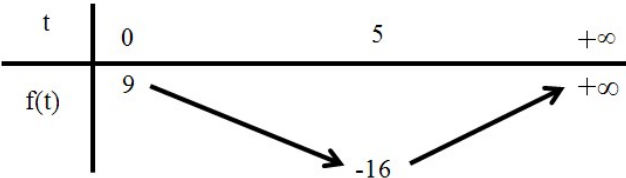
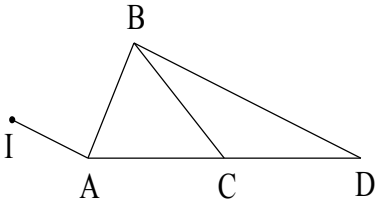
Chữ ký giám thị coi thi số 1:

Chữ ký giám thị coi thi số 2:

I. Hướng dẫn chung

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4 điểm)	a) Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 + 2(m+1)x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (2)$	0.5
	Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt: $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - m^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1.$	0.5
	Gọi các nghiệm của phương trình (2) là x_1, x_2 . Tọa độ các giao điểm A, B là $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$; $\overline{KA} = (x_1 - 2; 2), \overline{KB} = (x_2 - 2; 2).$	0.5
	$KA \perp KB \Leftrightarrow \overline{KA} \cdot \overline{KB} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$ $\Leftrightarrow m^2 - 1 - 2.2(m+1) + 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}.$	0.5
	Kết hợp điều kiện $m > -1$, ta được $m = 1, m = 3$.	
	b) $y = -x^2 + 2(m+1)x + 1 - m^2 \Leftrightarrow y = -x^2 + 2(m+1)x - (m+1)^2 + (m+1)^2 + 1 - m^2$ $\Leftrightarrow y = -(x - m - 1)^2 + 2m + 2.$	0.5
	$\Rightarrow y \leq 2m + 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.	0.5
	Dấu "=" xảy ra khi $x = m + 1$. Giá trị lớn nhất của hàm số là $2m + 2$.	0.5
Câu 2 (6 điểm)	Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 6 khi $2m + 2 = 6 \Leftrightarrow m = 2$.	0.5
	a) Điều kiện: $x < -1$ hoặc $x > 1$	0.5
	Phương trình $\frac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{3x^2 - 3}} = 2x + 3 \Leftrightarrow 3(2x + 3)(2x - 3) = (2x + 3)\sqrt{3x^2 - 3}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ \sqrt{3x^2 - 3} = 3(2x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 3x^2 - 3 = 9(2x - 3)^2 \end{cases} \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -\frac{3}{2}, x = 2$.	0.5
	b) Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$. Phương trình $\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = m \quad (1)$	0.5
	Đặt $t = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$, điều kiện $t \geq 0$. $(1) \Leftrightarrow (t - 9)(t - 1) = m$ $\Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = m \quad (2), t \geq 0$	0.5
	Xét hàm số $f(t) = t^2 - 10t + 9, t \geq 0$.	0.5

			
	Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq 0 \Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $f(t) = t^2 - 10t + 9, t \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -16$.		0.5
	c) Điều kiện: $\begin{cases} 3x + y + 3 \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$. Từ phương trình (1) $\Leftrightarrow (x - 1)^3 = (y + 1)^3 \Leftrightarrow y = x - 2$.		0.5
	Với $y = x - 2$ thay vào (2), ta được: $9(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}) = x + 3$ $\Leftrightarrow 9(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}) = (x+3)(\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2})$ $\Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 9$		0.5
	$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 9 \Leftrightarrow (\sqrt{4x+1} - 5) + (\sqrt{3x-2} - 4) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{4x-24}{\sqrt{4x+1}+5} + \frac{3x-18}{\sqrt{3x-2}+4} = 0 \Leftrightarrow (x-6)\left(\frac{4}{\sqrt{4x+1}+5} + \frac{3}{\sqrt{3x-2}+4}\right) = 0$		0.5
	$\Leftrightarrow x = 6$, vì $\frac{4}{\sqrt{4x+1}+5} + \frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} > 0$. Vậy hệ có nghiệm (6; 4)		0.5
Câu 3 (6 điểm)	a) Gọi I là điểm thỏa mãn $4\vec{IA} + \vec{IB} - 2\vec{IC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow 3\vec{IA} + \vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{0}$		0.5
	$\Leftrightarrow 3\vec{IA} = 2\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{BD} \Leftrightarrow \vec{IA} = \frac{1}{3}\vec{BD}$		0.5
	Với D là điểm thỏa mãn C là trung điểm của đoạn AD. Vì A, B, C cố định nên D cố định, suy ra I cố định.		0.5
	Suy ra M, N, I thẳng hàng hay MN đi qua điểm I cố định.		0.5
	b) Áp dụng các: $\sin A = \frac{a}{2R}$; $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $S = \frac{abc}{4R}$		0.5
	Suy ra: $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$		0.5
	Tương tự: $\cot B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$; $\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$		0.5
	Suy ra: $\cot A + \cot B + \cot C = a^2 + b^2 + c^2$.		0.5
	c) Điểm M nằm trên trục hoành nên gọi $M(m; 0)$, $\vec{MA} = (1 - m; 2)$, $\vec{MB} = (4 - m; 3)$		0.5
	$\cos 45^\circ = \frac{(1-m)(4-m) + 2 \cdot 3}{\sqrt{(1-m)^2 + 2^2} \sqrt{(4-m)^2 + 3^2}}$		0.5
	$\Leftrightarrow m^4 - 10m^3 + 44m^2 - 110m + 75 = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 6m + 5)(m^2 - 4m + 15) = 0$		0.5
	$\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 5$. Kết luận: $M(1; 0)$ hoặc $M(5; 0)$.		0.5
Câu 4	Gọi $2x$ là số phòng trống ($x \in \mathbb{N}, 0 \leq x < 16$). Số phòng cho thuê là $32 - 2x$; giá tiền		0.5

(2 điểm)	1 phòng là: $(2000 + 200x)$ ngàn.	
	Số tiền thu được trong 1 tháng là: $T = (32 - 2x)(2000 + 200x)$ ngàn	0.5
	Áp dụng BĐT cosi, ta được: $T = 400(16 - x)(10 + x) \leq 400\left(\frac{16 - x + 10 + x}{2}\right)^2 = 67600$	0.5
	Dầu bãng xảy ra khi $x = 3$, vậy để có thu nhập mỗi tháng cao nhất thì giá là 2.600.000đ/1 phòng.	0.5
Câu 5 (2 điểm)	Chứng minh BĐT: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$ (*) với mọi $x, y, z > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.	0.5
	Chứng minh BĐT: $xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} = 3$, đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.	0.5
	Khi đó: $A = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{2018}{xy + yz + zx}$ $\geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + xy + yz + zx} + \frac{2018}{xy + yz + zx}$ $= \frac{9}{(x + y + z)^2} + \frac{2018}{xy + yz + zx} \geq \frac{2021}{3}$	0.5
	Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2021}{3}$.	0.5