

Lưu ý : Thí sinh không được sử dụng máy tính!

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ: (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi)

Câu 1: Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} + \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{2}}$

Câu 2: Giải phương trình: $\frac{21}{x^2 - 4x + 6} = x^2 - 4x + 10$

Câu 3: Cho $a - b = 2$

Tính giá trị của biểu thức: $B = a^2(a+1) - b^2(b-1) + 2023ab - 3ab(a-b + 675)$

Câu 4: Tìm các số tự nhiên n để $n+5$ và $n+30$ đều là số chính phương.

Câu 5: Cho số $a > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = 4a + \frac{2}{(a-1)^2}$

Câu 6: Cho a, b là các số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$

Tính giá trị biểu $E = a^5 + b^5$

Câu 7: Đa thức $P(x)$ chia cho $3-2x$ có số dư là 5, chia cho $x+2$ có số dư là 12. Tìm dư khi chia đa thức $P(x)$ cho $2x^2 + x - 6$

Câu 8: Một cửa hàng nhập được một lô hàng để bán. Ngày thứ nhất bán được 8 sản phẩm và $\frac{1}{8}$ số sản phẩm còn lại. Ngày thứ hai bán được 16 sản phẩm và $\frac{1}{8}$ số sản phẩm còn lại. Ngày thứ ba bán được 24 sản phẩm và $\frac{1}{8}$ số sản phẩm còn lại. Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết toàn bộ lô hàng đã nhập. Biết số sản phẩm bán được mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì bán hết lô hàng.

Câu 9: Tam giác ABC cân tại A, biết $AB = 2\text{cm}$ và góc A bằng 36° . Tính BC

Câu 10: Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 48cm^2 ; trên BC và CD lần lượt lấy các điểm E và F. Biết $S_{ABE}=8\text{cm}^2$; $S_{ADF}=2\text{cm}^2$. Tính S_{AEF} ?

II. PHẦN TƯ LUẬN: (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11:

a) Giải phương trình: $(2x-1)^2 - 9 = 4\sqrt{x^2 - x}$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $7(x^2 + y^2) = 25(x + y)$

Câu 12: Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BH vuông góc với AC (H thuộc AC). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AH và BH.

a. Chứng minh $CK \perp IB$

b. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tia IE cắt đường thẳng BC ở M. Chứng minh FE là phân giác của góc IFM

Câu 13. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 12$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{x+4} + \sqrt{2y+4} + \sqrt{3z+4}$

Hết!

Họ và tên thí sinh:Số báo danh.....

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG TOÁN 9 NĂM HỌC 2022-2023

Phần ghi kết quả: 10đ

Bài	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kết quả	$A = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$	$B=12$	$n=139$	$D=10$	$E=-573$	$8-2x$	7	$\sqrt{5}-1$	$\frac{70}{3}$

Hướng dẫn giải chi tiết:

Bài 1. $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 2. $\frac{21}{x^2-4x+6} = x^2-4x+10 \Leftrightarrow \frac{21}{(x-2)^2+2} = (x-2)^2+6 (*)$

Đặt: $(x-2)^2 = t \ (t \geq 0)$

$(*) \Rightarrow \frac{21}{t+2} = t+6 \Rightarrow t^2+8t+12=21 \Leftrightarrow t^2+8t-9=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+9)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-9(loại) \end{cases}$

Thay: $(x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

Bài 3. $B = a^3 - b^3 + a^2 + b^2 + 2023ab - 2025ab - 3ab(a-b)$
 $= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) + a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^3 + (a-b)^2 = 8 + 4 = 12$

Bài 4. Đặt $n+5 = a^2; n+30 = b^2$ (với a,b nguyên và $b > a > 0$)

Theo bài ra ta có: $b^2 - a^2 = 25 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 25 \Rightarrow \begin{cases} b+a=25 \\ b-a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=13 \end{cases}$

Thay vào ta có $n=139$.

Bài 5. $D = 4a + \frac{2}{(a-1)^2} = 2(a-1) + 2(a-1) + \frac{2}{(a-1)^2} + 4 \geq 3\sqrt{2(a-1) \cdot 2(a-1) \cdot \frac{2}{(a-1)^2}} = 10$

Bài 6. Cho a,b là các số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$

Tính giá trị biểu $E = a^5 + b^5$

+) $a^2 + 3a = b^2 + 3b \Leftrightarrow (a-b)(a+b+3) = 0 \Rightarrow a+b = -3$ (vì $a \neq b$)

+) $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2 \Rightarrow a^2 + 3a + b^2 + 3b = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + 3(a+b) = 4$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - 9 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$

+) $a+b = -3 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9 \Rightarrow 13 + 2ab = 9 \Rightarrow ab = -2$

+) $(a^2 + b^2)(a+b) = a^3 + b^3 + ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 = 13 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-3) = -45$

Nên $E = a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - a^2b^2(a+b) = 13 \cdot (-45) - 4 \cdot (-3) = -573$

Bài 7: Dư nếu có khi chia đa thức $P(x)$ cho $2x^2 - x - 6$ là $ax + b$

$P(x) = (2x^2 - x - 6) \cdot q(x) + ax + b = -(x+2)(3-2x) \cdot q(x) + ax + b$

Theo bài ra: $\begin{cases} P(\frac{3}{2}) = 5 \\ P(-2) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}a + b = 5 \\ -2a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 10 \\ -4a + 2b = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$

Bài 8. Gọi tổ số sản phẩm ban đầu là x.

Số sản phẩm bán được trong ngày thứ nhất là: $8 + \frac{1}{8}(x-8) = 7 + \frac{x}{8}$

Số sản phẩm bán được trong ngày thứ hai là: $16 + \frac{1}{8} \left[\frac{7}{8}(x-8) - 16 \right] = \frac{105}{8} + \frac{7x}{64}$

Vì số sản phẩm bán được mỗi ngày như nhau nên ta có:

$$\frac{105}{8} + \frac{7x}{64} = 7 + \frac{x}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{64} = \frac{49}{8} \Leftrightarrow x = 392 \text{ (sp)}$$

Ngày thứ nhất bán được: $7 + \frac{392}{8} = 7 + 49 = 56 \text{ (sp)}$

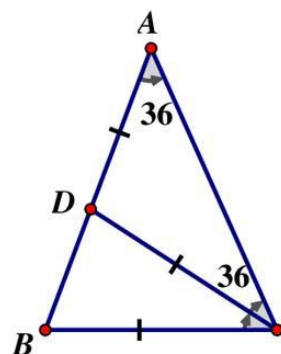
Thời gian bán hết lô hàng: $\frac{392}{56} = 7 \text{ (ngày)}$

Bài 9. Vẽ phân giác CD. Khi đó ta có các tam giác ACD và BCD cân.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{AC}{BC+AC} \Leftrightarrow BC(BC+AB) = AB^2; (DA=BC; AB=AC)$$

$$BC^2 + BC \cdot AB = AB^2 \Leftrightarrow (2BC + AB)^2 = 5AB^2 \Leftrightarrow BC = \frac{AB(\sqrt{5}-1)}{2} = \sqrt{5}-1$$



Bài 10.

Theo bài ra ta có: $AB \cdot BC = 48$; (1)

$AB \cdot BE = 16$; (2)

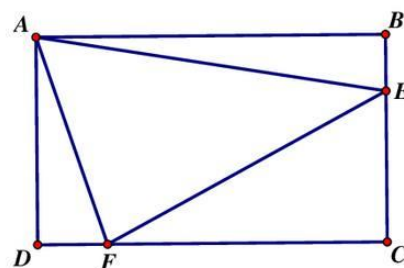
$AD \cdot DF = 4$; (3)

Từ (1) và (2) suy ra $BE = \frac{1}{3}BC \Rightarrow CE = \frac{2}{3}BC$; (4)

Từ (1) và (3) suy ra $DF = \frac{1}{12}DC \Rightarrow CF = \frac{11}{12}DC$; (5)

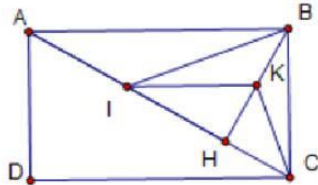
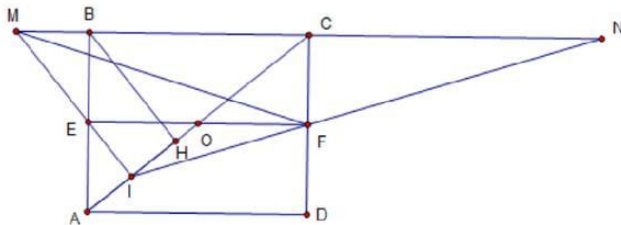
Từ (4); (5) $CE \cdot CF = \frac{2}{3} \cdot BC \cdot \frac{11}{12}DC = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{12} \cdot BC \cdot DC = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{12} \cdot 48 = \frac{88}{3} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{44}{3}$

Vậy $S_{AEF} = 48 - (2 + 8 + \frac{44}{3}) = \frac{144}{3} - \frac{74}{3} = \frac{70}{3}$



Phần trình bày bài vào bài làm: (10đ)

Bài	Nội dung	Điểm
11a 2,5đ	ĐK: $x \geq 1$ hoặc $x \leq 0$. Ta có $(2x-1)^2 - 9 = 4\sqrt{x^2-x} \Leftrightarrow 4(x^2-x) - 4\sqrt{x^2-x} + 1 = 9$ $\Leftrightarrow (2\sqrt{x^2-x}-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2-x}-1=3 \\ 2\sqrt{x^2-x}-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x}=2(1) \\ \sqrt{x^2-x}=-1(2) \end{cases}$ Ta thấy (2) vô nghiệm.	

	$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 17 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 17$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \sqrt{17} \\ 2x - 1 = -\sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$ Đổi chiếu với ĐK thấy cả hai nghiệm đều thỏa mãn Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}; x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$	
11b 1,5đ	Vì $25(x + y) = 7(x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0(1)$ Mặt khác $50(x + y) = 7.2(x^2 + y^2) \geq 7.(x + y)^2 \Rightarrow x + y \leq \frac{50}{7} < 8(2)$ Để ý rằng $25(x + y)$ chia hết cho 7 mà $(7; 25) = 1$ nên $x + y$ chia hết cho 7 nên từ (1) và (2) suy ra $x + y = 0$ hoặc $x + y = 7$ TH1 $x + y = 0$ suy ra $x^2 + y^2 = 0$ tìm được $(x; y) = (0; 0)$ TH2. $x + y = 7$ suy ra $x^2 + y^2 = 25$ tìm được $(x; y) = (3; 4), (4; 3)$	
12 a 3đ	IK là đường trung bình của tam giác ABH. Suy ra $IK // \frac{1}{2} AB \Rightarrow IK \perp BC$ Suy ra K là trực tâm của tam giác BCI nên $CK \perp BI$ 	
12 b 1,5đ	 Gọi N là giao điểm của IF và BC; O là giao điểm của EF và AC. Chứng minh được: $OE = OF$ và $EF // BC$ Vì: $OE // CM$ và $OF // CN$ nên ta có: $\frac{OE}{CM} = \frac{IO}{IC} = \frac{FO}{CN}$ mà $OE = OF$ nên $CM = CN$. $\Rightarrow \triangle FCM = \triangle FCN (c - g - c) \Rightarrow CFM = CFN$ $\Rightarrow FC$ là phân giác của MFN Mà $FE \perp FC$; MFI kề bù với $MFN \Rightarrow FE$ là phân giác của MFI	
Bài 13 1,5đ	Đặt $\begin{cases} \sqrt{x + 4} = a \\ \sqrt{2y + 4} = b; a, b, c \geq 2 \\ \sqrt{3z + 4} = c \end{cases} \quad (\text{Do } x, y, z \geq 0)$ Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 = x + 4 + 2y + 4 + 3z + 4 = (x + y + z) + 12 + (y + 2z) \geq 24$ Và $F = a + b + c > 0$ Do $a, b, c \geq 2$ nên:	

$(a-2)(b-2) + (b-2)(c-2) + (c-2)(a-2) \geq 0$ $\Leftrightarrow ab + bc + ca - 4(a+b+c) + 12 \geq 0$ $\Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 4(a+b+c) - 12 = 4F - 12$ Lại có $F^2 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 24 + 2(4F - 12) \geq 8F$ $\Leftrightarrow F(F-8) \geq 0 \Leftrightarrow F \geq 8$ (do $F > 0$) Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ (a-2)(b-2) + (b-2)(c-2) + (c-2)(a-2) = 0 \end{cases}$ Khi đó $y=z=0$, $x=12$ Vậy GTNN của $F=8$ khi $x=12$; $y=z=0$	
--	--

Lưu ý: Mọi cách giải đúng đều cho điểm tối đa.