

**I. PHẦN CHUNG**

**Câu 1(3,5 điểm)**

1) Rút gọn biểu thức  $A = \left( \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1}$ , với  $x \neq \pm 1; x \neq \frac{-1}{4}$ .

2) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  thỏa mãn  $2x^3 + (x+1)^3 - 3x^3 = 1$ .

**Câu 2(3,0 điểm)**

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1)  $x^4 - 5x^2 + 4$ ;

2)  $(x+y+2z)^2 + (x+y-z)^2 - 9z^2$ .

**Câu 3(3,0 điểm)**

1) Xác định các số thực  $a, b$  để đa thức  $P(x) = x^3 + ax + b$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 1$ .

2) Cho  $a, b, c$  là ba số khác 0. Chứng minh rằng nếu  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$  thì

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = 1.$$

**Câu 4(6,5 điểm)** Cho hình chữ nhật ABCD ( $AB > 2BC$ ), trên cạnh AB lấy điểm M sao cho  $BC = AM$ , trên tia CB lấy điểm N sao cho  $CN = BM$ , CM cắt AN tại P, trên cạnh CD lấy điểm E sao cho  $CE = CB$ .

1) Chứng minh tứ giác AMCE là hình bình hành.

2) Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau.

3) Đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt đường thẳng qua N vuông góc với NE tại điểm F. Chứng minh tứ giác AENF là hình vuông.

4) Gọi K là giao điểm của EN với PC, L là giao điểm của EF với AN. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác NKL và NEP.

**II. PHẦN RIÊNG**

*Thí sinh lựa chọn làm một (chỉ một) câu trong hai câu sau:*

**Câu 5a (4,0 điểm)**

1) Chứng minh rằng nếu  $2n$  (với  $n \in \mathbb{N}^*$ ) là tổng của hai số chính phương thì  $n$  cũng là tổng của hai số chính phương.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $A = \frac{6x-2}{3x^2+1}$ .

**Câu 5b (4,0 điểm)**

1) Cho biểu thức  $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2022^3 + 2023^3$ . Tìm số dư khi chia số A cho 3.

2) Cho  $x, y$  là hai số dương thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = x^3y^5 + x^5y^3$ .

-----**HẾT**-----

Họ và tên thí sinh : ..... Số báo danh .....

| Câu                    | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Điểm                                                                               |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1.1. (2,0 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                    |
|                        | <p>Cho biểu thức <math>A = \left( \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1}</math>, với <math>x \neq \pm 1; x \neq -\frac{1}{4}</math>.</p> <p>Rút gọn biểu thức A.</p> $A = \left( \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1}$ $= \left[ \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right] \cdot \frac{4x+1}{x-1}$ $= \frac{3x+1-2x(x+1)+3x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1}$ $= \frac{3x+1-2x^2-2x+3x^2-3x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1}$ $= \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1}$ $= \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1}$ $= \frac{4x+1}{x+1}$ <p>Vậy <math>A = \frac{4x+1}{x+1}</math></p> | <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| <b>1.2. (1,5 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                    |
|                        | $2x^3 + (x+1)^3 - 3x^3 = 1$ $\Leftrightarrow 2x^3 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3x^3 = 1$ $\Leftrightarrow 2x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^3 = 1$ $\Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0$ $\Leftrightarrow 3x(x+1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ <p>Vậy <math>x = 0</math> hoặc <math>x = -1</math> thỏa mãn.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>            |
| <b>2.1 (1,5 điểm)</b>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                    |

|                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                          |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
|                       | $x^4 - 5x^2 + 4$ $= x^4 - 4x^2 - x^2 + 4$ $= (x^4 - 4x^2) - (x^2 - 4)$ $= x^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4)$ $= (x^2 - 4)(x^2 - 1)$ $= (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,5<br><br>0,25<br>0,25<br><br>0,25<br>0,25              |
| <b>2.2 (1,5 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                          |
|                       | $(x + y + 2z)^2 + (x + y - z)^2 - 9z^2$ $= [(x + y + 2z)^2 - 9z^2] + (x + y - z)^2$ $= (x + y + 2z - 3z)(x + y + 2z + 3z) + (x + y - z)^2$ $= (x + y - z)(x + y + 5z) + (x + y - z)^2$ $= (x + y - z)[(x + y + 5z) + (x + y - z)]$ $= (x + y - z)(2x + 2y + 4z)$ $= 2(x + y - z)(x + y + 2z)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,25<br><br>0,25<br><br>0,25<br><br>0,25<br>0,25<br>0,25 |
| <b>3.1 (1,5 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                          |
|                       | <p>3) Xác định các số thực <math>a, b</math> để đa thức <math>P(x) = x^3 + ax + b</math> chia hết cho đa thức <math>x^2 - 1</math>.</p> <p>Vì <math>P(x) = x^3 + ax + b</math> chia hết cho đa thức <math>x^2 - 1</math></p> <p>Suy ra <math>P(x) = (x^2 - 1).Q(x)</math> (1)</p> <p>Thay <math>x = 1</math> vào (1) ta có <math>P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1</math> (*)</p> <p>Thay <math>x = -1</math> vào (1) ta có <math>P(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + b = 0 \Rightarrow b - a = 1</math> (**)</p> <p>Từ (*) và (**) ta có: <math>(a + b) + (b - a) = -1 + 1 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -1</math>.</p> <p>Vậy <math>a = -1; b = 0</math>.</p> | <br><br><br>0,5<br><br>0,25<br><br>0,25<br>0,25<br>0,25  |
| <b>3.2 (1,5 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                          |
|                       | <p>Cho <math>a, b, c</math> là ba số khác 0. Chứng minh rằng nếu <math>(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2</math> thì</p> $\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = 1.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                          |
|                       | <p>Ta có <math>(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + bc + ca = 0</math></p> <p>Khi đó:</p> $a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - (ab + bc + ca)$ $= a^2 + bc - ab - ac$ $= (a^2 - ab) - (ac - bc)$ $= a(a - b) - c(a - b)$ $= (a - b)(a - c)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25                                                     |
|                       | Tương tự:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25                                                     |



|                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                 |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                              | <p>+ Ta có ABCD là hình chữ nhật (1) nên <math>AB \parallel CD</math>. Mà <math>M \in AB; E \in CD \Rightarrow AM \parallel CE</math></p> <p>+ Lại có: <math>AM = BC; CE = BC \Rightarrow AM = CE</math></p> <p>Xét tứ giác AMCE có: <math>AM \parallel CE; AM = CE</math></p> <p>Do đó tứ giác AMCE là hình bình hành.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>                |
| <b>4.2 (1,5 điểm)</b>        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                 |
|                              | <p>• Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau.</p> <p>+ Từ (1) <math>\Rightarrow AB = CD</math>;<br/> Mà <math>AB = AM + BM; CD = CE + DE; AM = CE</math> (cmt) <math>\Rightarrow BM = DE</math><br/> Mặt khác <math>CN = BM</math> (gt) <math>\Rightarrow DE = CN (= BM)</math><br/> + Từ (1) <math>\Rightarrow AD = BC</math>, mà <math>CE = BC \Rightarrow AD = CE (= BC)</math></p>                                                                                                                                                                                                                  | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
|                              | <p>+ Xét <math>\triangle ADE</math> và <math>\triangle ECN</math> có:</p> <p><math>AD = CE</math> (cmt)</p> <p><math>\angle ADE = \angle ECN (= 90^\circ)</math></p> <p><math>DE = CN</math> (cmt)</p> <p><math>\Rightarrow \triangle ADE = \triangle ECN</math> (c.g.c)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5                                             |
| <b>4.3 (1,5 điểm)</b>        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                 |
|                              | Chứng minh tứ giác AENF là hình vuông                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                 |
|                              | <p>+ Có <math>\triangle ADE = \triangle ECN</math> (cmt) <math>\Rightarrow \begin{cases} AE = NE \\ \angle AED = \angle CNE \end{cases}</math></p> <p>Mà <math>\triangle CNE</math> vuông tại C <math>\Rightarrow \angle ENC + \angle NEC = 90^\circ \Rightarrow \angle AED + \angle NEC = 90^\circ \Rightarrow \angle AEN = 90^\circ</math></p> <p>+ Xét tứ giác AENF có:</p> <p><math>\angle AEN = 90^\circ</math> (cmt)</p> <p><math>\angle FAE = 90^\circ</math> (<math>AF \perp AE</math>)</p> <p><math>\angle FNE = 90^\circ</math> (<math>FN \perp NE</math>)</p> <p>Suy ra AENF là hình chữ nhật</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p>              |
|                              | <p>Lại có <math>AE = NE</math> (cmt)</p> <p>Nên AENF là hình vuông.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>0,25</p> <p>0,25</p>                         |
| <b>4.4 (1,5 điểm)</b>        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                 |
|                              | Tính tỉ số diện tích của hai tam giác NKL và NEP                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                 |
|                              | <p>+ Có AENF là hình vuông và AN cắt EF tại L <math>\Rightarrow \triangle NLE</math> vuông cân tại L.</p> <p>Hạ <math>LG \perp NE</math> (<math>G \in NE</math>) <math>\Rightarrow G</math> là trung điểm của NE và <math>LG = \frac{1}{2} NE</math> (*)</p> <p>+ AMCE là hình bình hành (cmt) <math>\Rightarrow AE \parallel CM</math>, mà <math>AE \perp EN \Rightarrow CM \perp EN</math><br/> hay <math>PK \perp KN \Rightarrow \triangle PKN</math> vuông cân tại K (do <math>\angle PNE = 45^\circ</math>) <math>\Rightarrow PK = NK</math> (**)</p>                                                   | <p>0,5</p> <p>0,5</p>                           |
|                              | <p>+ <math>\triangle NKL</math> có <math>LG \perp NK \Rightarrow S_{NKL} = \frac{1}{2} LG \cdot NK</math></p> <p><math>\triangle NPE</math> có <math>PK \perp NE \Rightarrow S_{NPE} = \frac{1}{2} PK \cdot NE</math></p> <p>Do đó kết hợp với (*) và (**) <math>\Rightarrow S_{NKL} = \frac{1}{2} S_{NPE} \Rightarrow \frac{S_{NKL}}{S_{NPE}} = \frac{1}{2}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                     | <p>0,25</p> <p>0,25</p>                         |
| <b>5.1 bảng A (2,0 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                 |
|                              | <p>Theo bài ra : <math>2n = a^2 + b^2</math> với <math>a, b \in N</math>.</p> <p>Từ đây suy ra <math>a, b</math> cùng tính chẵn lẻ.</p> <p>Do đó <math>a + b</math> và <math>a - b</math> là các số chẵn.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>             |

|                              |                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                              | Đặt $\begin{cases} a+b=2m \\ a-b=2k \end{cases}$ trong đó $m, k \in \mathbb{Z}$ .                                                                                                                                                             | 0,25 |
|                              | Suy ra: $a = m+k, b = m-k$                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |
|                              | Khi đó $2n = (m+k)^2 + (m-k)^2 \Rightarrow n = m^2 + k^2$ .<br>Vậy có đpcm.                                                                                                                                                                   | 0,5  |
| <b>5.2 bảng A (2,0 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|                              | 3) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $A = \frac{6x-2}{3x^2+1}$ .                                                                                                                                                                   |      |
|                              | *) $A = \frac{6x-2}{3x^2+1}$<br>$= \frac{6x-2}{3x^2+1} - 1 + 1$<br>$= \frac{6x-2-3x^2-1}{3x^2+1} + 1$<br>$= 1 - \frac{3(x-1)^2}{3x^2+1}$<br>$\Rightarrow A \leq 1$ với $\forall x$                                                            | 0,25 |
|                              | Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$ .                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|                              | Vậy giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x = 1$ .                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |
|                              | *) $A = \frac{6x-2}{3x^2+1}$<br>$= \frac{6x-2}{3x^2+1} + 3 - 3$<br>$= \frac{6x-2+9x^2+3}{3x^2+1} - 3$<br>$= \frac{(3x+1)^2}{3x^2+1} - 3$<br>$\Rightarrow A \geq -3$ với $\forall x$                                                           | 0,25 |
|                              | Dấu “=” xảy ra khi $x = -\frac{1}{3}$                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                              | Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -3 khi $x = -\frac{1}{3}$ .                                                                                                                                                                                     | 0,25 |
| <b>5.1 bảng B (2,0 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|                              | $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2022^3 + 2023^3$ . Tổng A có 2023 số hạng. Ta chia thành $2023 : 3 = 674$ (nhóm), dư 1 số như sau:<br>$A = (1^3 + 2^3 + 3^3) + (4^3 + 5^3 + 6^3) + \dots + (2020^3 + 2021^3 + 2022^3) + 2023^3$                | 0,25 |
|                              | + Chứng minh đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$<br>(1)                                                                                                                                              | 0,5  |
|                              | + Nếu $a, b, c$ là 3 số tự nhiên liên tiếp. Giả sử $a = n; b = n+1, c = n+2$ ( $n \in \mathbb{N}$ )<br>khi đó ta có $a+b+c = n+(n+1)+(n+2) = 3n+3$ chia hết cho 3. Mà $3abc$ cũng chia hết cho 3 nên từ (1) $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 : 3$ | 0,5  |
|                              | +Áp dụng kết quả trên ta có:                                                                                                                                                                                                                  |      |

|                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                             |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
|                              | $1^3 + 2^3 + 3^3 : 3$<br>$4^3 + 5^3 + 6^3 : 3$<br>...<br>$2020^3 + 2021^3 + 2022^3 : 3$<br>2023 chia cho 3 dư 1 nên $2023^3$ chia cho 3 cũng dư 1<br>Do đó A chia cho 3 dư 1.                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,5<br><br>0,25             |
| <b>5.2 bảng B (2,0 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                             |
|                              | Cho $x, y$ là hai số dương thỏa mãn $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^3 y^5 + x^5 y^3$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                             |
|                              | + Trước hết ta CM BĐT: $(a + b)^2 \geq 4ab$ . Dấu “=” xảy ra khi $a = b$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5                         |
|                              | + Áp dụng BĐT trên ta có:<br>$A = x^3 y^5 + x^5 y^3$ $= x^3 y^3 (x^2 + y^2)$ $= \frac{1}{2} (xy)^2 \cdot [2xy(x^2 + y^2)]$ $\leq \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{(x + y)^2}{4} \right)^2 \cdot \frac{(2xy + x^2 + y^2)}{4}$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1^4}{16} \cdot \frac{(x + y)^2}{4}$ $= \frac{1}{128}.$ Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$ .<br>Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{128}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ . | 1,0<br><br>0,25<br><br>0,25 |

**Chú ý:**

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----Hết-----