

Câu 1 (5,0 điểm).

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $a^3 - a^2 - 4a + 4$

b) $2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

2. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

c) Tìm x để $|A| + A = 0$.

Câu 2 (3,0 điểm).

Giải các phương trình sau:

a) $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

b) $\frac{15x}{x^2+3x-4} = \frac{12}{x+4} + \frac{4}{x-1} + 1$

Câu 3 (4,0 điểm).

1. Cho a, b, c là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng biểu thức $Q = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ là bình phương của một số hữu tỷ.

2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$.

3. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 210$.

Tính giá trị của biểu thức $B = |a-b| + |b-c| + |c-a|$.

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho tam giác ABC , M là một điểm thuộc cạnh BC (M khác B , M khác C). Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC , AB chúng cắt AB , AC lần lượt tại D và E .

a) Chứng minh tứ giác $ADME$ là hình bình hành. Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để hình bình hành $ADME$ là hình thoi.

b) Chứng minh rằng $BD \cdot EC = DM \cdot ME$.

c) Cho $S_{BDM} = 9\text{cm}^2$, $S_{CME} = 16\text{cm}^2$. Tính S_{ABC} (ký hiệu S là diện tích tam giác).

d) Chứng minh rằng $AM \cdot BC < AC \cdot BM + AB \cdot CM$

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho số thực x thỏa mãn điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{2-x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (5,0điểm)	1. (2,0 điểm)	
	a) $a^3 - a^2 - 4a + 4 = a^2(a-1) - 4(a-1) = (a-1)(a+2)(a-2)$	0,5
	b) $2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3 = 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a+b)$	0,5
	$= (a+b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab)$	0,25
	$= (a+b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) = (a+b)[2a(a+2b) + b(b+2a)]$	0,5
	$= (a+b)(2a+b)(a+2b)$	0,25
	2. (3,0 điểm)	
	a) $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$	
	ĐKXD: $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$	0,25
	$A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} = \left(\frac{x+1+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$	0,5
	$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$	0,25
	b) Để A nguyên thì $\frac{2}{1-2x}$ nguyên $\Rightarrow 1-2x$ là ước của 2. $U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$	0,25
	*) $1-2x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (loại)	0,25
	*) $1-2x = -1 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)	
	*) $1-2x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (TM)	
*) $1-2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$ (loại)	0,25	
Vậy $x = 0$ thì A nhận giá trị nguyên	0,25	
c) $ A + A = 0 \Leftrightarrow A = -A \Leftrightarrow A \leq 0$	0,5	
$\Leftrightarrow 1-2x < 0 \Leftrightarrow -2x < -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$	0,25	
Đôi chiếu với ĐKXD ta có $x > \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.	0,25	
	a) (1,5 điểm)	
	*) Nếu $x \geq 2$, phương trình đã cho trở thành $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = 4$	
	$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-5) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = \sqrt{5}(tm) \\ x = -\sqrt{5}(l) \end{cases}$	0,25
*) Nếu $x < 2$, phương trình đã cho trở thành	0,25	

	$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = -4$	
	$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = -4 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$ vô nghiệm	0,25
	KL: Phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{5}$.	0,25
	b) (1,5 điểm)	
	ĐKXĐ: $x \neq -4$; $x \neq 1$	0,25
	$\frac{15x}{x^2+3x-4} = \frac{12}{x+4} + \frac{4}{x-1} + 1 \Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} = \frac{12}{x+4} + \frac{4}{x-1} + 1$	0,5
	$\Rightarrow 15x = 12(x-1) + 4(x+4) + x^2 + 3x - 4$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$	0,25
	$x = 0$ (thỏa mãn ĐK); $x = -4$ (không thỏa mãn ĐK) Vậy pt có nghiệm $x = 0$	0,25
Câu 3 (4,0 điểm)	1. (1,0 điểm)	
	Vì $ab+bc+ca=1$ nên $a^2+1 = a^2+ab+bc+ca = (a+b)(a+c)$	0,25
	$b^2+1 = b^2+ab+bc+ca = (a+b)(b+c)$	0,25
	$c^2+1 = c^2+ab+bc+ca = (b+c)(c+a)$	0,25
	Do đó $Q = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \Rightarrow \text{ĐPCM}$	0,25
	2. (1,5 điểm)	
	$x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)^2 = 16 - y^2$ (1)	0,25
	Từ (1) suy ra $16 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 16 \Rightarrow y^2 \in \{0; 4; 9; 16\}$	
	*) $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 4$	0,25
	*) $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} (L)$	0,25
	*) $y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} (L)$	0,25
	*) $y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4 \Rightarrow x = \pm 8$	0,25
	Vậy Pt đã cho có các cặp nghiệm nguyên là $(4;0), (-4;0), (8;4), (-8;-4)$	0,25
3. (1,5 điểm)		
Đặt $a-b=x$; $b-c=y$; $c-a=z \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)$. Ta có:	0,5	
$x^3+y^3+z^3=210 \Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210 \Leftrightarrow -3xy(x+y)=210 \Leftrightarrow xyz=70$.	0,25	
Ta có: $x^3+y^3+z^3=210 \Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210 \Leftrightarrow -3xy(x+y)=210$	0,25	
Do x, y, z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=70=(-2).(-5).7$ nên $x, y, z \in \{-2; -5; 7\}$	0,5	
$A = a-b + b-c + c-a = 14$.	0,25	
Câu 4 (6,0 điểm)		

	a) (1,0 điểm)	
	Ta có $ME \parallel AB$, $MD \parallel AC$ (giả thiết) nên tứ giác $ADME$ là hình bình hành.	0,5
	Để hình bình hành $ADME$ là hình thoi thì đường chéo AM là phân giác của $\widehat{DAE} \Rightarrow M$ là chân đường phân giác của \widehat{BAC}	0,5
	b) (1,0 điểm)	
	Xét $\triangle BDM$ và $\triangle MEC$ có $\widehat{DBM} = \widehat{EMC}$, $\widehat{DMB} = \widehat{ECM}$ (vì đồng vị)	0,5
	$\Rightarrow \triangle BDM$ đồng dạng với $\triangle MEC$ (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{BD}{ME} = \frac{DM}{EC} \Rightarrow BD \cdot EC = DM \cdot ME$	0,25
	c) (2,0 điểm)	
	Từ $\triangle BDM$ đồng dạng với $\triangle MEC$ theo chứng minh trên	
	$\Rightarrow \frac{S_{BDM}}{S_{MEC}} = \left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{3}{4}$	0,5
	$\Rightarrow \frac{MB}{MB+MC} = \frac{3}{4+3} \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{3}{7}$	0,5
	Mặt khác do $MD \parallel AC \Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{S_{BDM}}{S_{BAC}} = \left(\frac{MB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2$	0,5
	$\Rightarrow S_{BAC} = \frac{49}{9} \cdot 9 = 49(cm^2)$	0,5
	d) (2,0 điểm)	
	Theo chứng minh trên $ADME$ là hình bình hành $\Rightarrow DM = AE$	0,25
	$ME \parallel AB \Rightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow ME \cdot CB = CM \cdot AB$ (1)	0,5
	$MD \parallel AC \Rightarrow \frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow MD \cdot BC = AC \cdot BM$ (2)	0,5
	Cộng về theo vế (1) và (2) ta có $BC(ME + MD) = CM \cdot AB + AC \cdot BM$	0,25
	$\Rightarrow BC(ME + AE) = CM \cdot AB + AC \cdot BM$	0,25
	Lại có $\Rightarrow AM < ME + AE \Rightarrow BC \cdot AM < BC(ME + AE) = CM \cdot AB + AC \cdot BM$	0,25
Câu 5 (2,0 điểm)	Đặt $x^2 = a$, $0 \leq a \leq 1$ Biểu thức đã cho trở thành	
	$P = \frac{a}{2-a} + \frac{1-a}{1+a} = \frac{a}{2-a} + 1 + \frac{1-a}{1+a} + 1 - 2 = \frac{2}{2-a} + \frac{2}{1+a} - 2$	0,25
	$= 2 \left(\frac{3}{(2-a)(1+a)} - 1 \right) = 2 \left(\frac{3}{2+a(1-a)} - 1 \right)$	0,25
	*) Vì $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow P \leq 2 \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = 1$	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$. Vậy Max P = 1 khi $x=0$ hoặc $x=1$	0,25
	$0 \leq a \leq 1$ nên a và $1-a$ là hai số không âm. Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a(1-a) \leq \frac{(a+1-a)^2}{4} = \frac{1}{4}$	0,25
$\Rightarrow P \geq 2 \left(\frac{3}{2 + \frac{1}{4}} - 1 \right) = \frac{2}{3}$	0,25	

	Đẳng thức xảy ra khi $a = 1 - a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ hay $x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}}$	0,25
	Vậy Min P = $\frac{2}{3}$ khi $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$	0,25

Lưu ý khi chấm bài:

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.
- Với bài 4, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không chấm.