

Câu 1: (5,0 điểm)

1. Thực hiện các phép tính:

a) $\frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4}$.

b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64}$

2. Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$; $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ và $2x + 3y + 4z = 372$. Tính $A = 3x + 4y + 5z$

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $B = 9x^2 - 10x + 1$, biết rằng $x^2 = 1$.

b) $C = x^3 + xy^3 - x^3y + y^3$; tại x, y thỏa mãn: $(x-1)^4 + (y+1)^4 = 0$

2. Tìm x biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+9| = 14x$

Câu 3: (3,5 điểm)

1. Tìm các số a, b, c không âm, thỏa mãn đồng thời ba điều kiện: $a + 3c = 2014$; $a + 2b = 2015$; tổng $(a + b + c)$ đạt giá trị lớn nhất.

2. Trên bảng viết 99 số: 1, 2, 3, 4, ..., 99. Cứ mỗi lần người ta xóa đi hai số bất kỳ, rồi lại viết giá trị của tổng hai số vừa xóa vào bảng. Cuối cùng trên bảng chỉ còn lại một số, giả sử đó là số k . Hãy tìm k và chứng tỏ k không phải là số chính phương.

Câu 4: (6,5 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A , có $\angle BAC = 120^\circ$, phân giác AD ($D \in BC$). Kẻ DE vuông góc với AB tại E , DF vuông góc với AC tại F . Lấy điểm K trên cạnh AC sao cho $AK = AD$.

1. Chứng minh rằng: $\triangle AED = \triangle AFD$ và tam giác DEF là tam giác đều;

2. Chứng minh rằng: K là trung điểm của AC , từ đó suy ra $AD = \frac{1}{2} AC$;

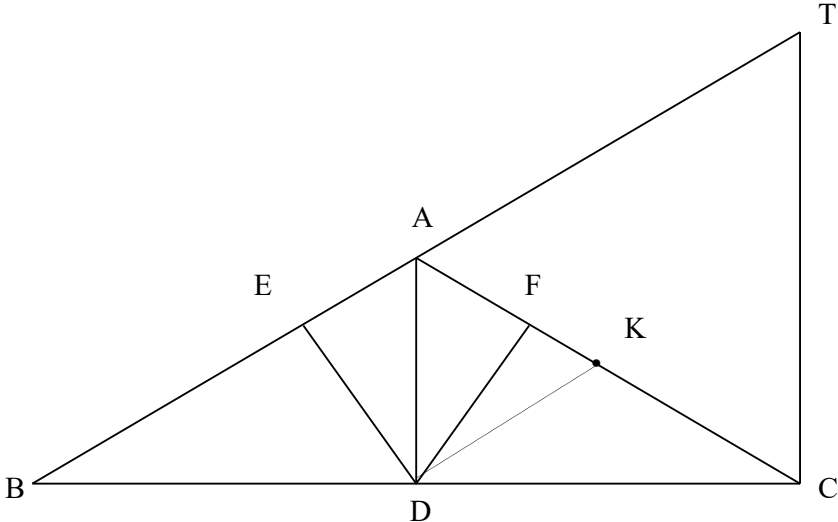
3. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD cắt BA ở T . Đặt $CT = a$; $CF = b$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$.

Câu 5: (1,0 điểm) Cho m, n, p là các số nguyên dương thỏa mãn: $m^2 = n^2 + p^2$. Chứng minh rằng: tích $m.n.p$ chia hết cho 15.

..... Hết

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (5,0 điểm)	1.a (1,5 điểm)	
	$\frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} : \frac{1}{9} + \frac{9}{4}$	0,75
	$= \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{1} + \frac{9}{4} = \frac{36}{4} = 9$	0,75
	1.b (1,5 điểm)	
	$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \cdots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2^6}$	0,5
	$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 30 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 30 \cdot 31 \cdot 2^{30} \cdot 2^6}$	0,5
	$= \frac{1}{2^{36}}$	0,5
	2. (2,0 điểm)	
	$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$	0,5
	$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} = \frac{372}{186} = 2$	0,75
	Từ $\frac{2x}{30} = 2; \frac{3y}{60} = 2; \frac{4z}{96} = 2$, suy ra $x = 30; y = 40; z = 48$ Vậy $A = 3x + 4y + 5z = 490$	0,75
Câu 2 (4,0 điểm)	1.a (1,5 điểm)	
	Ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$	0,5
	Với $x = 1$ thì $B = 9 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 1 = 0$	
	Với $x = -1$ thì $B = 9 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) + 1 = 20$	0,75
	Vậy $x = 1$ thì $B = 0$	
	$x = -1$ thì $B = 20$	0,25
	1.b (1,5 điểm)	
	1) Do $(x-1)^4 \geq 0; (y+1)^4 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^4 + (y+1)^4 \geq 0$ với mọi x, y .	0,5
	Kết hợp $(x-1)^4 + (y+1)^4 = 0$ suy ra $(x-1)^4 = 0$ và $(y+1)^4 = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow x = 1; y = -1$.	0,25
	Thay vào tính được giá trị của biểu thức $C = 0$	
	2. (1,0 điểm)	
	Nhận xét: Vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0. Do đó vế phải cũng luôn lớn hơn hoặc bằng 0.	

	Suy ra $14x \geq 0$ hay $x \geq 0$. Với $x \geq 0$ ta có: $ x+1 + x+2 + x+3 + \dots + x+9 = 14x$ $\Leftrightarrow x+1 + x+2 + x+3 + \dots + x+9 = 14x$ $\Leftrightarrow 9x + 45 = 14x$ $\Leftrightarrow x = 9$ (TM) Vậy $x = 9$	0,25 0,25 0,5
Câu 3 (3,5 điểm)	1. (2,0 điểm)	
	Từ $a + 3c = 2014$, $a + 2b = 2015$ suy ra $2a + 2b + 3c = 4029$ Do đó $2(a + b + c) + c = 4029$ Để $(a + b + c)$ đạt giá trị lớn nhất thì c phải có giá trị nhỏ nhất. Mà $c \geq 0$ nên $c = 0$.	0,25 0,25 0,75
	Khi đó $a = 2014$; $b = \frac{1}{2}$; $c = 0$ GTLN của $(a + b + c)$ là $\frac{4029}{2}$	0,75
	2. (1,5 điểm)	
	Nhận xét: Số k còn lại trên bảng chính là tổng của các số ban đầu: Do đó số cuối cùng còn lại trên bảng có giá trị là $k = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$ Số $k = 4950 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$, không phải là số chính phương.	0,5 0,75 0,25
Câu 4 (6,5 điểm)		
	Vẽ được hình ý 1) , ghi GT- KL: 0,5 điểm	
	1. (2,0 điểm)	
	Ta có $\triangle AED = \triangle AFD$ (Cạnh huyền- góc nhọn) Suy ra $DE = DF$ (1)	0,75 0,25

	Vì AD là tia phân giác của góc A nên $\angle EAD = \angle FAD = 60^0$	0,75
	Từ đó suy ra $\angle EDF = 60^0$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EDF$ là tam giác đều.	
	2. (2,5 điểm)	
	Ta có $\angle DAK = 60^0$ (chứng minh trên) và AD= AK	0,5
	Do đó ADK là tam giác đều.	0,25
	Suy ra AK = DK (*)	
	Lại có trong tam giác vuông ADC suy ra $\angle KCD = 30^0$ (3)	0,25
	$\angle ADK + \angle KDC = 90^0$ mà $\angle ADK = 60^0$	
	Suy ra $\angle KDC = 30^0$ (4)	0,5
Câu 5 (1,0 điểm)	Từ (3), (4) suy ra tam giác KCD cân tại K	0,25
	$\Rightarrow KC = KD$ (**)	0,5
	Từ (*) và (**) suy ra AK = KC hay K là trung điểm của AC	0,25
	Từ đó suy ra $AD = \frac{1}{2} AC$	0,25
	3. (1,5 điểm)	
	Chứng minh được $\triangle CTA$ là tam giác đều (có hai góc 60^0)	0,25
	Suy ra AC = CT = a	
	AF = AC- CF = a- b	0,25
	Tam giác vuông ADF có $\angle ADF = 30^0$ nên AD = 2(a- b) (5)	0,5
	Lại có $AD = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2}$ (6)	0,5
	Từ (5) và (6), suy ra: $a = 4(a - b)$ hay $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	
	(Sử dụng kết quả của câu trên)	
	Nếu m, n, p không chia hết cho 3 thì m^2, n^2, p^2 chia 3 dư 1. Suy ra $m^2 = n^2 + p^2$ (vô lí). Do đó m, n, p phải có ít nhất một số chia hết cho 3, nên tích mnp chia hết cho 3.	0,25
	Nếu m, n, p không chia hết cho 5 thì m^2, n^2, p^2 chia 5 dư 1 hoặc 4 .Suy ra $n^2 + p^2$ chia 5 dư 0, 2 hoặc 3, nên $m^2 = n^2 + p^2$ (vô lí). Do đó m, n, p phải có ít nhất một số chia hết cho 5, nên tích mnp chia hết cho 5.	0,5
	Mà $(3;5) = 1$. Vậy tích mnp luôn chia hết cho 15.	0,25

Lưu ý:

- Học sinh làm bài các cách khác nhau mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.
- Câu hình không có hình vẽ hoặc hình vẽ sai thì không chấm toàn câu.
- Tổng điểm của bài thi không làm tròn.