

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}-x}{1-x\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

b) Cho biểu thức $P = (x^3 + 12x - 31)^{2021}$.

Tính giá trị của biểu thức P tại $x = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

Câu 2 (4,0 điểm).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x - a^2$ và parabol (P) có phương trình: $y = ax^2$ ($a > 0$).

a) Tìm a để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B . Chứng minh rằng khi đó A và B nằm bên phải trục tung.

b) Gọi x_A, x_B là hoành độ của A và B . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A \cdot x_B}.$$

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

b) Cho $a, b \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: Nếu $(a^2 + b^2 + 9ab) : 11$ thì $(a^2 - b^2) : 11$.

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BD và CE là hai đường cao của ΔABC . Gọi R là giao điểm của BD với (O) (R khác điểm B), S là giao điểm của CE với (O) (S khác điểm C). Tia AO cắt BC tại M và cắt cung nhỏ BC tại N . Tia BO cắt AC tại P . Tia CO cắt AB tại F .

a) Chứng minh: Tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC .

b) Chứng minh: $DE \parallel SR$ và AN là tia phân giác của góc SAR .

c) Chứng minh: $\frac{MB \cdot MC}{MA^2} + \frac{PC \cdot PA}{PB^2} + \frac{FA \cdot FB}{FC^2} = 1$.

Câu 5 (2,0 điểm).

a) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$x + y + z \geq \frac{xy+1}{y+1} + \frac{yz+1}{z+1} + \frac{zx+1}{x+1}.$$

b) Xét 100 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \dots, 100$. Gọi A là số thu được bằng cách sắp một cách tùy ý 100 số đó thành một dãy, B là số thu được bằng cách đặt một cách tùy ý các dấu cộng vào giữa các chữ số của A . Chứng minh rằng cả A và B cùng không chia hết cho 2046.

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: