

Câu 1 (3,5 điểm).

- a) Cho m, n là các số nguyên. Chứng minh rằng $mn(m^2 - n^2)$ chia hết cho 6.
- b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^2 + 14q^2 + 2r^2 = 6pqr$.

Câu 2 (6,5 điểm).

- a) Giải phương trình $(13x + 1)\sqrt{2x - 1} = (7x - 1)\sqrt{8x + 1} - 4$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 7x + 9 \\ x(y - x + 1) = 3. \end{cases}$$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 - y^2 + z^2 = xy + 3yz + zx$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{(2y + z)^2} - \frac{1}{xy(y + 2z)}$.

Câu 4 (7,0 điểm). Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $BC = 2R$ và một điểm A thay đổi trên nửa đường tròn đó (A không trùng với B và C). Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC . Đường thẳng IJ cắt AB, AC theo thứ tự tại M và N .

- a) Chứng minh tam giác AMN vuông cân.
- b) Gọi P là giao điểm của BI và CJ . Chứng minh $\frac{PA^2}{CA \cdot AB} + \frac{PB^2}{AB \cdot BC} + \frac{PC^2}{BC \cdot CA} = 1$.
- c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác HIJ theo R .

Câu 5 (1,5 điểm). Trên một khu đất hình chữ nhật kích thước $100m \times 120m$. Người ta muốn xây một sân bóng nhân tạo có nền đất là hình chữ nhật kích thước $25m \times 35m$ và 9 bồn hoa hình tròn đường kính $5m$. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở các vị trí như thế nào thì trên phần đất còn lại luôn tìm được một nền đất kích thước $25m \times 35m$ để xây sân bóng.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh.....

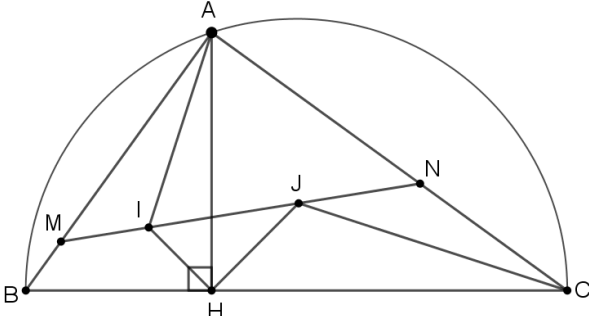
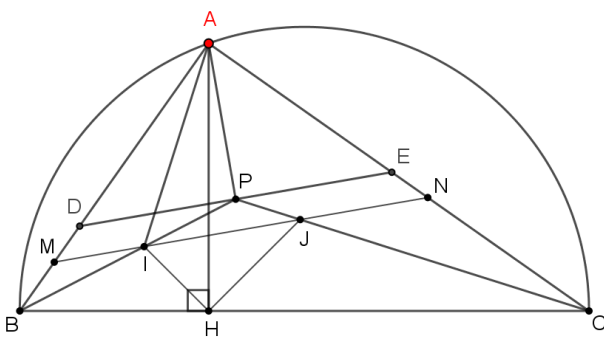
Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Môn thi: TOÁN – Bảng A
(Hướng dẫn chấm này gồm có 05 trang)

Câu	ĐÁP ÁN THAM KHẢO	Điểm
1.a (2,5đ)	Cho m, n là các số nguyên. Chứng minh rằng $mn(m^2 - n^2)$ chia hết cho 6.	
	Ta có $mn(m^2 - n^2) = m^3n - mn^3 = m^3n - mn + mn - mn^3 = n(m^3 - m) - m(n^3 - n)$	1,0
	Với mọi số nguyên a , ta có: $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$	0,5
	Vì $a-1$, a , $a+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(a-1)a(a+1) : 6 \Rightarrow a^3 - a : 6$, với mọi số nguyên a .	0,5
	Từ đó suy ra $\begin{cases} m^3 - m : 6 \\ n^3 - n : 6 \end{cases} \Rightarrow n(m^3 - m) - m(n^3 - n) : 6 \Rightarrow mn(m^2 - n^2) : 6$	0,5
1.b (1,0đ)	Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn: $p^2 + 14q^2 + 2r^2 = 6pqr$.	
	Giả sử q và r đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow \begin{cases} q^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ r^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14q^2 \equiv 2 \pmod{3} \\ 2r^2 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow 14q^2 + 2r^2 \equiv 1 \pmod{3}$	0,25
	Suy ra $p^2 \equiv 2 \pmod{3}$ (Vô lý vì số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1) $\Rightarrow \begin{cases} q:3 \\ r:3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=3 \\ r=3 \end{cases}$	
	Trường hợp 1: Với $q=3 \Rightarrow p^2 + 2r^2 = 18(pr-7)$ Nếu p lẻ $\Rightarrow p^2 + 2r^2$ lẻ và $18(pr-7)$ chẵn nên không tồn tại p, r thỏa mãn $\Rightarrow p=2$	0,25
	Khi $p=2$, thay trở lại ta có: $r^2 - 18r + 65 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r=5 \\ r=13 \end{cases}$	
	Trường hợp 2: Với $r=3 \Rightarrow p^2 + 14q^2 = 18(pq-1)$ Nếu p lẻ $\Rightarrow p^2 + 14q^2$ lẻ và $18(pq-1)$ chẵn nên không tồn tại p, q thỏa mãn $\Rightarrow p=2$	0,25
	Khi $p=2$, thay trở lại ta có: $7q^2 - 18q + 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ q=\frac{11}{7} \text{ (loại)} \end{cases}$ Vậy $(p; q; r) = (2; 3; 5)$ hoặc $(p; q; r) = (2; 3; 13)$.	0,25
2.a (3,0đ)	Giải phương trình $(13x+1)\sqrt{2x-1} = (7x-1)\sqrt{8x+1} - 4$.	
	Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với: $(26x+2)\sqrt{2x-1} = (14x-2)\sqrt{8x+1} - 8$.	0,5
	Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{8x+1} \\ b = \sqrt{2x-1} \end{cases} (a > 0, b \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} 14x-2 = (8x+1) + 3(2x-1) = a^2 + 3b^2 \\ 26x+2 = (2x-1) + 3(8x+1) = b^2 + 3a^2 \end{cases}$	0,5

	Khi đó, phương trình trên trở thành: $(a^2 + 3b^2)a - (b^2 + 3a^2)b = 8 \Leftrightarrow (a - b)^3 = 8 \Leftrightarrow a - b = 2$ Với $a - b = 2 \Rightarrow \sqrt{8x + 1} - \sqrt{2x - 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{8x + 1} = \sqrt{2x - 1} + 2 \Leftrightarrow 8x + 1 = (\sqrt{2x - 1} + 2)^2$ $\Leftrightarrow 3x - 1 = 2\sqrt{2x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ (3x - 1)^2 = 4(2x - 1) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 14x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{9} \end{cases}$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 1, x = \frac{5}{9}$.	0,5
		0,5
		0,5
		0,5
2.b (3,5đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 7x + 9 \\ x(y - x + 1) = 3. \end{cases}$ Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 7x + 9 & (1) \\ xy = x^2 - x + 3 & (2) \end{cases}$ Thay (2) vào (1) ta có: $(2x^2 - x + 3)^2 = 7x + 9$ $\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 13x = 0$ $\Leftrightarrow 4x^3(x - 1) + 13x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(4x^2 + 13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ Thay vào (2) ta thấy: Khi $x = 0 \Rightarrow 0y = 3$ (không thỏa mãn). Khi $x = 1 \Rightarrow y = 3$ Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (1; 3)$.	0,5
		0,5
		1,0
		0,5
		0,5
3 (1,5đ)	Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 - y^2 + z^2 = xy + 3yz + zx$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{(2y + z)^2} - \frac{1}{xy(y + 2z)}$. +) Ta có: $x^2 - y^2 + z^2 = xy + 3yz + zx \Leftrightarrow (x + z)^2 = (x + y)(y + 3z)$ $\leq \left(\frac{x + y + y + 3z}{2} \right)^2 = \frac{(x + 2y + 3z)^2}{4} \Rightarrow x + 2y + 3z \geq 2(x + z) \Rightarrow 2y + z \geq x$ Do đó $\frac{x}{(2y + z)^2} \leq \frac{1}{2y + z}$ (1). +) Lại có: $xy(y + 2z) = \frac{1}{3}x \cdot (3y)(y + 2z) \leq \frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{3y + y + 2z}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}x(2y + z)^2 \leq \frac{1}{3}(2y + z)^3$ (2) Từ (1), (2) suy ra $P \leq \frac{1}{2y + z} - \frac{3}{(2y + z)^3}$	0,5
		0,5

	Đặt $2y + z = t, t > 0$. Ta có $P = \frac{1}{t} - \frac{3}{t^3} = \frac{2}{9} - \left(\frac{3}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{2}{9} \right) = \frac{2}{9} - \left(\frac{2t^3 - 9t^2 + 27}{9t^3} \right)$ $= \frac{2}{9} - \frac{(t^2 - 6t + 9)(2t + 3)}{9t^3} = \frac{2}{9} - \frac{(t - 3)^2(2t + 3)}{9t^3} \leq \frac{2}{9}, \forall t > 0. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow t = 3.$ Vậy $\max P = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = z \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$	0,5
4.a (4,0đ)	Chứng minh tam giác AMN vuông cân.  Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) +) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH suy ra $HA^2 = HB \cdot HC \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA}$ (1) +) Lại có $\triangle IHA \sim \triangle JHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HI}{HJ} = \frac{HA}{HC}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HI}{HJ} = \frac{HB}{HA}$; Đồng thời $\widehat{IHJ} = \widehat{AHB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle HIJ \sim \triangle HBA$ (c.g.c). $\Rightarrow \widehat{HIJ} = \widehat{HBA} \Rightarrow \widehat{MIH} + \widehat{MBH} = 180^\circ$ Suy ra $\widehat{IMB} + \widehat{IHB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IMB} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{AMN} = 45^\circ$. Suy ra tam giác AMN vuông cân tại A.	1,0
4.b (2,0đ)	Gọi P là giao điểm BI và CJ. Chứng minh $\frac{PA^2}{CA \cdot AB} + \frac{PB^2}{AB \cdot BC} + \frac{PC^2}{BC \cdot CA} = 1$. Ta có AP là phân giác của $\widehat{BAC}$. Qua P vẽ đường thẳng vuông góc với AP, cắt AB, AC theo thứ tự tại D và E. Suy ra tam giác ADE vuông cân tại A. Suy $\widehat{BDP} = \widehat{BPC} = \widehat{PEC} = 135^\circ$  Khi đó, ta có: +) $\triangle DBP \sim \triangle PBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PD}{BD} = \frac{PC}{PB}$ và $PB^2 = DB \cdot BC$. (3) +) $\triangle EPC \sim \triangle PBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PE}{CE} = \frac{PB}{PC}$ và $PC^2 = BC \cdot CE$. (4)	0,5
		0,5

Suy ra: $\frac{PD}{BD} \cdot \frac{PE}{CE} = \frac{PC}{PB} \cdot \frac{PB}{PC} = 1 \Rightarrow PD \cdot PE = BD \cdot CE \Rightarrow BD \cdot CE = PD \cdot PE = PE^2$ (do $PD = PE$) (5)

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác PAE vuông tại P ta có:

$$PA^2 = AE^2 - PE^2 = AE^2 - BD \cdot CE = AE \cdot AD - BD \cdot CE, \text{ theo (5).}$$

$$= (AC - CE)(AB - BD) - BD \cdot CE = AB \cdot AC - BD \cdot AC - AB \cdot CE$$

$$\Rightarrow PA^2 BC = AB \cdot AC \cdot BC - (BC \cdot BD) AC - AB \cdot (EC \cdot BC)$$

$$\Rightarrow PA^2 BC = AB \cdot AC \cdot BC - PB^2 \cdot AC - PC^2 \cdot AB, \text{ do kết hợp với (3) và (4).}$$

$$\Rightarrow \frac{PA^2}{AB \cdot AC} = 1 - \frac{PB^2}{BC \cdot AB} - \frac{PC^2}{AC \cdot BC} \Rightarrow \frac{PA^2}{AB \cdot AC} + \frac{PB^2}{AB \cdot BC} + \frac{PC^2}{BC \cdot CA} = 1$$

0,5

0,5

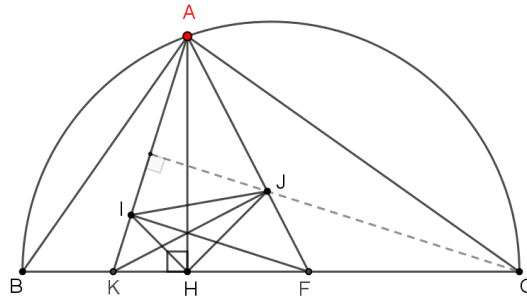
0,5

0,5

4c

(1,0đ)

Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác HIJ theo R.



Gọi K và F theo thứ tự là giao điểm của AI; AJ với BC.

Ta có $\begin{cases} \widehat{AFC} = \widehat{FAC} + \widehat{ACF} \\ \widehat{BAF} = \widehat{HAF} + \widehat{BAH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AFC} = \widehat{BAF} \Rightarrow \triangle BAF \text{ cân tại B} \Rightarrow BF = BA$

Tương tự $\triangle CAK$ cân tại C $\Rightarrow CK = CA$

Khi đó: $KF = CK - CF = CK - (BC - BF) = AC + AB - BC$

Xét tam giác KAJ có $\widehat{KAJ} = 45^\circ$; $JA = JK$ (do J nằm trên CJ là trung trực đoạn AK)

$$\Rightarrow \triangle KAJ \text{ vuông cân tại J} \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Tương tự } \triangle FAI \text{ vuông cân tại F} \Rightarrow \frac{AI}{AF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Từ đó suy ra $\frac{AJ}{AK} = \frac{AI}{AF} \Rightarrow \triangle AJI \sim \triangle AKF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{IJ}{FK} = \frac{AJ}{AK} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow IJ = \frac{FK}{\sqrt{2}} = \frac{AB + AC - BC}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2(AB^2 + AC^2)} - BC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot BC - BC}{\sqrt{2}} = \frac{BC(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $AB = AC$.

0,25

0,25

0,25

Câu 1 (3,5 điểm).

- a) Cho a, b là các số tự nhiên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a^2 - b^2$ chia hết cho 24.
- b) Tìm tất cả các số nguyên dương n để $9n^2 + 6n - 35$ là số nguyên tố.

Câu 2 (6,5 điểm).

- a) Giải phương trình $3x + 1 = \sqrt{8x + 1} + \sqrt{2x - 1}$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2y^2 + 2xy + 1 = 7x + 9 \\ x(y - x) = 2. \end{cases}$$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + 3y + 2z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} + z(z^2 - 8z + 17)$.

Câu 4 (7,0 điểm). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O, R) . Trên cung BC không chứa điểm A lấy điểm M bất kỳ (M không trùng với B và C).

- a) Chứng minh $MA = MB + MC$.
- b) Gọi D là giao điểm của AM và BC . Chứng minh $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1$.
- c) Xác định vị trí của M để tổng: $\frac{12}{MA} + \frac{2}{MD} + 2023\left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (1,5 điểm). Trên một khu đất hình chữ nhật kích thước $100m \times 120m$. Người ta muốn xây một sân bóng nhân tạo có nền đất là hình chữ nhật kích thước $25m \times 35m$ và 9 bồn hoa hình tròn đường kính $5m$. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở các vị trí như thế nào thì trên phần đất còn lại luôn tìm được một nền đất kích thước $25m \times 35m$ để xây sân bóng.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh.....

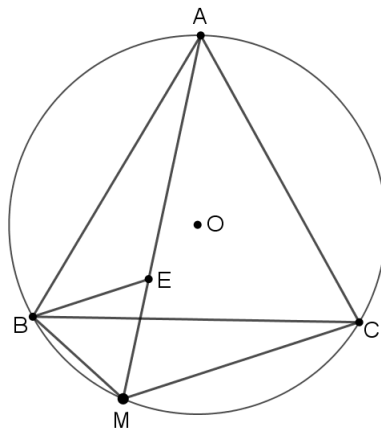
Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Môn thi: TOÁN – Bảng B
(Hướng dẫn chấm này gồm có 04 trang)

Câu	ĐÁP ÁN THAM KHẢO	Điểm
1.a (2,0đ)	Cho a, b là các số tự nhiên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a^2 - b^2$ chia hết cho 24.	
	+) Do $\begin{cases} a \text{ không chia hết cho } 3 \\ b \text{ không chia hết cho } 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 : 3 \quad (1)$	0,5
	+) Do a không chia hết cho 2 $\Rightarrow \begin{cases} a-1 : 2 \\ a+1 : 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 1 : 8$, do $a-1$ và $a+1$ là hai số chẵn liên tiếp.	0,5
	+) Tương tự $b^2 - 1 : 8$ Do đó $a^2 - b^2 = (a^2 - 1) - (b^2 - 1) : 8 \quad (2)$	0,5
	Từ (1), (2) suy ra $a^2 - b^2 : 24$.	0,5
1.b (1,5đ)	Tìm tất cả các số nguyên dương n để $9n^2 + 6n - 35$ là số nguyên tố.	
	Ta có $9n^2 + 6n - 35 = (9n^2 + 6n + 1) - 36 = (3n + 1)^2 - 36$	0,5
	$= (3n + 1 - 6)(3n + 1 + 6) = (3n - 5)(3n + 7)$ Lại có: $3n - 5 < 3n + 7, \forall n$	0,5
	Suy ra $9n^2 + 6n - 35$ là số nguyên tố thì $3n - 5 = 1 \Leftrightarrow n = 2$ Thử lại ta thấy $n = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,5
2.a (3,0đ)	Giải phương trình $3x + 1 = \sqrt{8x + 1} + \sqrt{2x - 1}$.	
	Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với: $6x + 2 = 2(\sqrt{8x + 1} + \sqrt{2x - 1})$.	0,5
	Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{8x + 1} \\ b = \sqrt{2x - 1} \end{cases} (a > 0, b \geq 0) \Rightarrow 6x + 2 = (8x + 1) - (2x - 1) = a^2 - b^2$	0,5
	Phương trình trên trở thành: $a^2 - b^2 = 2(a + b) \Leftrightarrow (a + b)(a - b - 2) = 0 \Leftrightarrow a - b - 2 = 0$, do $a + b > 0$	0,5
	Với $a - b = 2 \Rightarrow \sqrt{8x + 1} - \sqrt{2x - 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{8x + 1} = \sqrt{2x - 1} + 2 \Leftrightarrow 8x + 1 = (\sqrt{2x - 1} + 2)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow 3x - 1 = 2\sqrt{2x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ (3x - 1)^2 = 4(2x - 1) \end{cases}$	0,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 14x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{9} \end{cases}.$ Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 1, x = \frac{5}{9}$.	0,5
2.b (3,5đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 + 2xy + 1 = 7x + 9 \\ x(y - x) = 2. \end{cases}$	
	Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (xy + 1)^2 = 7x + 9 & (1) \\ xy = x^2 + 2 & (2) \end{cases}$	0,5
	Thay (2) vào (1) ta có: $(x^2 + 3)^2 = 7x + 9 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 - 7x = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x(x^3 + 6x - 7) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 + x + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$	1,0
	Thay vào (2) ta thấy: Khi $x = 0 \Rightarrow 0y = 3$ (không thỏa mãn).	0,5
	Khi $x = 1 \Rightarrow y = 3$ Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (1; 3)$.	0,5
3 (1,5đ)	Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + 3y + 2z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} + z(z^2 - 8z + 17).$	
	+) Ta có: $x + 3y + 2z = 3 \Rightarrow x + 3y = 3 - 2z \Rightarrow 3 - 2z \geq 0 \Rightarrow z \leq \frac{3}{2}$	0,5
	+) Lại có $\frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} = \frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} + 6 - 6 = \frac{x^2 + 9y^2 + 6xy + 6}{xy + 1} - 6 = \frac{(x + 3y)^2 + 6}{xy + 1} - 6$ $\leq \frac{(3 - 2z)^2 + 6}{1} - 6, \text{ do } \begin{cases} x + 3y = 3 - 2z \\ xy \geq 0 \end{cases}$	0,5
	Khi đó $P \leq (3 - 2z)^2 + z^3 - 8z^2 + 17z = z^3 - 4z^2 + 5z + 9 = (z^2 - 2z + 1)(z - 2) + 11$ $= 11 + (z - 1)^2(z - 2) \leq 11, \text{ do } z - 2 < 0, \forall 0 \leq z \leq \frac{3}{2}.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z = 1$. Vậy $\max P = 11 \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$ hoặc $(x; y; z) = \left(\frac{1}{3}; 0; 1\right)$.	0,5
4.a (3,0đ)	Chứng minh $MA = MB + MC$.	



0,5

Trên đoạn AM lấy điểm E sao cho $ME = MB$,

0,5

Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ (cùng chắn cung AB).
Suy ra tam giác MBE là tam giác đều. Suy ra $MB = BE$ (1)

0,5

Xét tam giác EBA và tam giác MBC có:
 $MB = BE$; $AB = AC$; $\widehat{BCM} = \widehat{BAE}$ (cùng chắn cung BM)

0,5

Suy ra $\triangle EBA = \triangle MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow EA = MC$ (2)

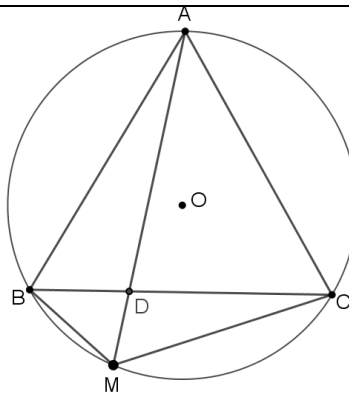
0,5

Từ (1) và (2) suy ra $MB + MC = ME + EA = MA$.

0,5

4.b
(3,0đ)

Gọi D là giao điểm AM và BC. Chứng minh $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1$



Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{CDM}$ (đối đỉnh) và $\widehat{BAD} = \widehat{DCM}$ (cùng chắn cung BM)

0,5

$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CMD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MD}{CM} = \frac{BD}{AB}$ (3)

0,5

Tương tự $\triangle ACD \sim \triangle BMD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MD}{BM} = \frac{CD}{AC}$

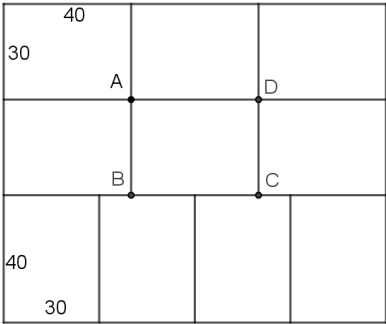
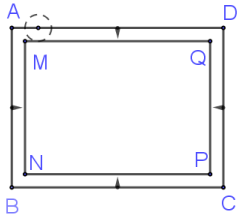
1,0

Lại do $AC = AB \Rightarrow \frac{MD}{BM} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{AB}$ (4)

0,5

Cộng (3) và (4) về theo về ta có $\frac{MD}{CM} + \frac{MD}{BM} = \frac{BD}{AB} + \frac{CD}{AB} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$

0,5

4.c (1,0đ)	Xác định vị trí của M để tổng: $\frac{12}{MA} + \frac{2}{MD} + 2023\left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Từ kết quả câu b) $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{MD} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{4}{MB + MC}$ Dấu “=” xảy ra khi $MB = MC$ (5) Khi đó: $\frac{12}{MA} + \frac{2}{MD} + 2023\left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}\right) = \frac{12}{MA} + 2\left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}\right) + 2023\left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}\right)$ $= \frac{12}{MA} + 2025\left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}\right)$ $\geq \frac{12}{MA} + 2025 \cdot \frac{4}{MB + MC} = \frac{12}{MA} + 2025 \cdot \frac{4}{MA} \text{ (do kết quả câu a: } MB + MC = MA \text{)}$ $= \frac{8112}{MA} \geq \frac{8112}{2R} = \frac{4056}{R} \text{ (do } MA \leq 2R \text{). Dấu “=” xảy ra khi } MA = 2R \Rightarrow MB = MC.$	0,25 0,25 0,25 0,25
5. (1,5đ)	Trên một khu đất hình chữ nhật kích thước 100m × 120m. Người ta muốn xây một sân bóng nhân tạo có nền đất là hình chữ nhật kích thước 25m × 35m và 9 bồn hoa hình tròn đường kính 5m. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở các vị trí như thế nào thì trên phần đất còn lại luôn tìm được một nền đất kích thước 25m × 35m để xây sân bóng. Ta chia mảnh đất hình chữ nhật ban đầu thành các mảnh đất hình chữ nhật nhỏ kích thước 30m x 40m (như hình vẽ). Có tất cả 10 hình chữ nhật 30m x 40m.   Theo nguyên lí Dirichle tồn tại ít nhất một hình chữ nhật 30m x 40m không chứa tâm hình tròn nào trong 9 hình tròn nói trên. Giả sử đó là ABCD Ta cắt mỗi cạnh của mảnh đất ABCD này đi 2,5m được một mảnh đất mới MNPQ có: Chiều rộng $MN = 30 - 2 \cdot 2,5 = 25\text{m}$ Chiều dài $NP = 40 - 2 \cdot 2,5 = 35\text{m}$ Suy ra MNPQ là mảnh đất đủ để xây sân bóng theo yêu cầu. Như vậy trong phần đất còn lại sau khi xây 9 bồn hoa ta luôn tìm được mảnh đất có kích thước 25m x 35m để xây sân bóng.	0,5 0,5 0,5

.....**Hết**.....

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.