UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I. ***(3,0 điểm)*** Cho biểu thức

$$P=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} \text{ với } a>0, a\neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm điều kiện của a để biểu thức $Q=\frac{8}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Câu II. ***(4,0 điểm)***

1. Giải phương trình $x^2-3\sqrt{x^3-3x^2+4x-2}=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+4x-6y-5=0 \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{2y}+2x^2+x=26. \end{cases}$

Câu III. ***(2,0 điểm)*** Cho parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;8)$ nằm trên (P). Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là $m(-2<m<4)$. Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.

Câu IV. ***(2,0 điểm)*** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x-2y)(x+2y)+4y=x+x^3$.

Câu V. ***(7,0 điểm)***

1. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA, CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là D, E. Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F $(0<FA\leq FB)$. Đường thẳng CF cắt AB tại M, cắt đường tròn (O) tại N (N không trùng với F) và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).

a) Giả sử $\widehat{ACB}=60^0$, tính DE theo R.

b) Chứng minh $CN.CF=CP.CM$.

c) Gọi I, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng BD, AB. Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại K. Tìm vị trí của điểm F để biểu thức $\frac{AB}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho góc nhọn xOy cố định và A là điểm cố định trên Ox. Đường tròn (I) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với Ox, Oy lần lượt tại E, D. Gọi AF là tiếp tuyến thứ hai kẻ từ A đến (I) (F là tiếp điểm). Chứng minh DF luôn đi qua một điểm cố định.

Câu VI. ***(2,0 điểm)***

Cho 2 số dương a, b. Chứng minh: $\frac{(a+b-1)^2}{(a+b)^2+1}+\frac{(a-b+1)^2}{(a+1)^2+b^2}+\frac{(b-a+1)^2}{(b+1)^2+a^2}\geq\frac{3}{5}$.

--- HẾT---

Họ và tên thí sinh:……Số báo danh:.....
Người coi thi số 1……Người coi thi số 2…….....

UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: TOÁN

HƯỚNG DẪN CHẤM
(*Hướng dẫn chấm gồm 06 trang*)

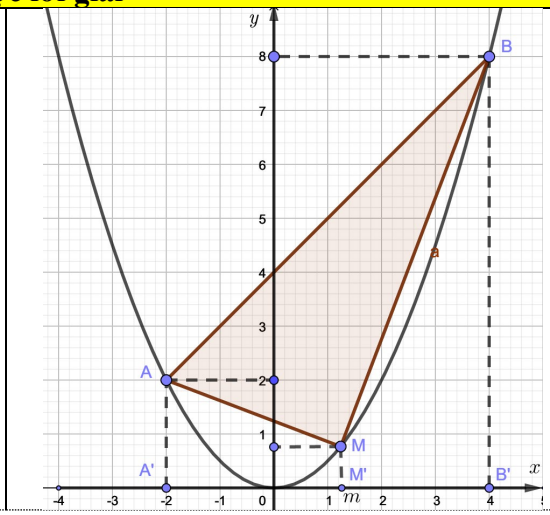
I. HƯỚNG DẪN CHUNG

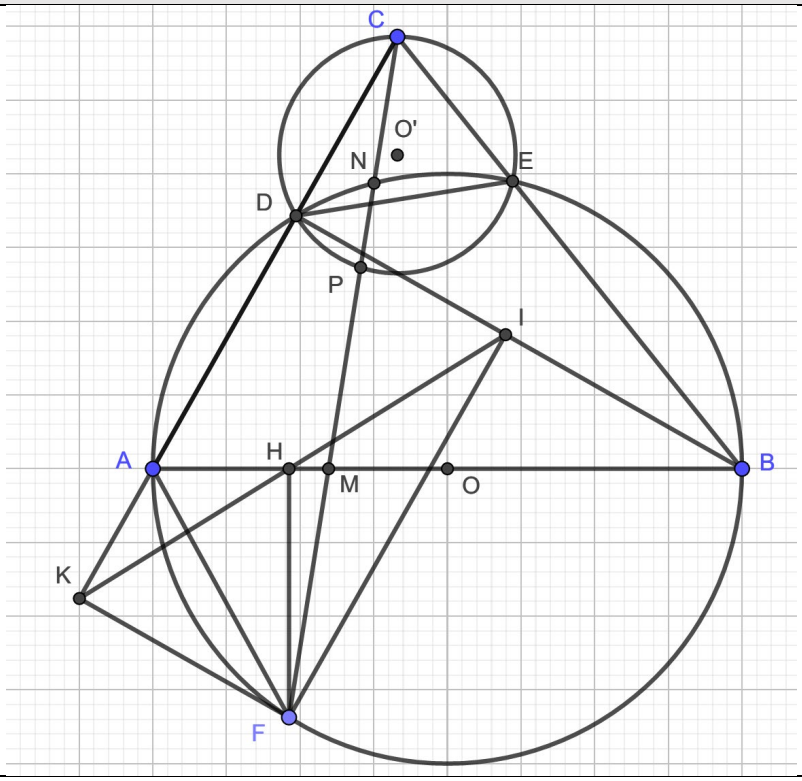
- *Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.*
- *Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.*
- *Điểm toàn bài không làm tròn.*

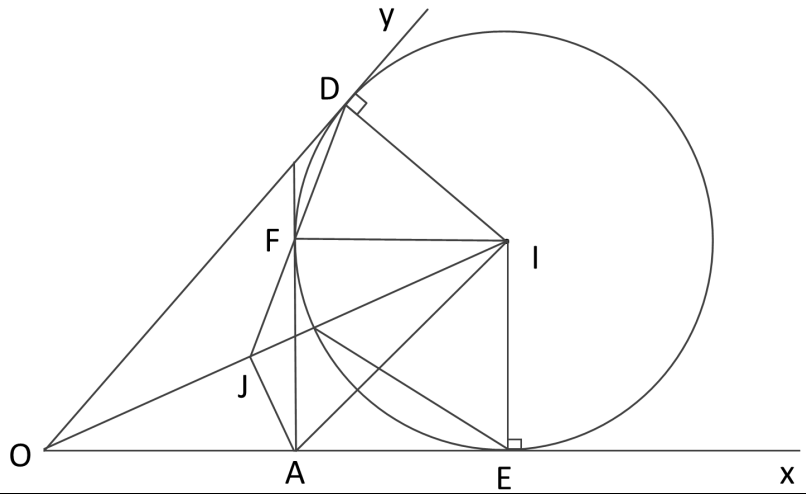
II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
I. (3,0 điểm)	Cho biểu thức $P=\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\dfrac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a>0, a\neq 1$.	
	a) Rút gọn biểu thức P.	**2,0**
	$P=\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^3-1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}+\dfrac{(1-a)\left(-1-a+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}(1-a)}$	0,75
	$=\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{-1-a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$	0,75
	$=\dfrac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$	0,5
	b) Tìm điều kiện của a để biểu thức $Q=\dfrac{8}{P}$ nhận giá trị nguyên.	**1,0**
	Có $P=\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}+2\geq 2\sqrt{\sqrt{a}.\dfrac{1}{\sqrt{a}}}+2=4$ (Theo BĐT Côsi) $P=4\Leftrightarrow\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\Leftrightarrow a=1$ (loại do $a\neq 1$) Vậy $P>4\,\forall a>0, a\neq 1$. $\Rightarrow 0<\dfrac{8}{P}<2\Rightarrow 0<Q<2$	0,5
	Do đó để $Q\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow Q=1\Leftrightarrow P=8\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}\right)^2-6\sqrt{a}+1=0$	0,25
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{a}=3-2\sqrt{2}\\ \sqrt{a}=3+2\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=17-12\sqrt{2}\\ a=17+12\sqrt{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy $a=17\pm 12\sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm	0,25
II. (4,0 điểm)	**1.** Giải phương trình $x^2-3\sqrt{x^3-3x^2+4x-2}=0$.	**2,0**
	Điều kiện $x^3-3x^2+4x-2\geq 0$	0,25
	Có $x^3-3x^2+4x-2=(x-1)\left(x^2-2x+2\right)$ nên $x^3-3x^2+4x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ vì $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0\,\forall x$	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$(1)\Leftrightarrow 2(x-1)+(x^2-2x+2)-3\sqrt{(x-1)(x^2-2x+2)}=0$ $\Leftrightarrow 2.\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}-3.\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}}+1=0$	0,25
	Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}}, t\geq 0$ ta được phương trình $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$	0,5
	$t=1\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}}=1\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}=1\Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ (vô nghiệm)	0,25
	$t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}=\dfrac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x^2-6x+6=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy pt có 2 nghiệm $x=3\pm\sqrt{3}$	0,5
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+4x-6y-5=0 \quad (1) \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{2y}+2x^2+x=26 (2)\end{cases}$	**2,0**
	Điều kiện $\begin{cases} x\geq -\dfrac{3}{2} \\ y\geq 0\end{cases}$	0,25
	$(1)\Leftrightarrow (x+2)^2=(y+3)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=y+3 \\ x+2=-y-3\end{array}\right.$	0,5
	$+) x+2=-y-3\Leftrightarrow (x+5)+y=0$ vô nghiệm vì $(x+5)+y>0\ \forall x\geq -\dfrac{3}{2}, y\geq 0.$	0,5
	$+) x+2=y+3\Leftrightarrow y=x-1$ thay vào (2) ta được $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2(x-1)}+2x^2+x=26$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+3}-3\right)+\left(\sqrt{2x-2}-2\right)+2x^2+x-21=0$ $\Leftrightarrow \dfrac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3}+\dfrac{2x-2-2}{\sqrt{2x-2}+2}+(x-3)(2x+7)=0$ $\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-2}+2}+2x+7\right)=0$ $\Leftrightarrow x=3, do \dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-2}+2}+2x+7>0\ \forall x\geq 1$	0,5
	$+) x=3\Rightarrow y=2$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;2)$	0,25
III. (2,0 điểm)	Cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;8)$ nằm trên (P). Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là $m(-2<m<4)$. Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.	

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Có $M\left(m;\dfrac{m^2}{2}\right)$ Gọi $A'(-2;0), M'(m;0), B'(4;0)$ $S_{ABB'A'}=\dfrac{(AA'+BB')A'B}{2}=30$ 	0,5
	$S_{AMM'A'}=\dfrac{(AA'+MM')A'M'}{2}=\dfrac{(4+m^2)(2+m)}{4}$ $S_{MBB'M'}=\dfrac{(MM'+BB')M'B'}{2}=\dfrac{(16+m^2)(4-m)}{4}$	0,5
	$S_{ABM}=S_{ABA'B'}-S_{AMM'A'}-S_{MBB'M'}=30-\dfrac{6m^2-12m+72}{4}=\dfrac{27}{2}-\dfrac{3(m-1)^2}{2}$ $S_{ABM}\le\dfrac{27}{2}\forall m$	0,75
	Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm	0,25
IV. (2,0 điểm)	Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x-2y)(x+2y)+4y=x+x^3$.	**2,0**
	$(x-2y)(x+2y)+4y=x+x^3\Leftrightarrow(x+1)(x^2+1)=(2y-1)^2$ (1)	0,25
	$y\in\mathbb{Z}\Rightarrow(2y-1)^2$ là số nguyên dương lẻ $\Rightarrow(x+1)(x^2+1)$ là số nguyên dươnglẻ $\Rightarrow x+1, x^2+1$ cùng lẻ và $1+x\ge 0$ Giả sử $(1+x,1+x^2)=d\Rightarrow$ d là số lẻ.	0,5
	Do $(1+x)\vdots d\Rightarrow(1-x^2)\vdots d$. Lại có $(1+x^2)\vdots d\Rightarrow\left[(1+x^2)+(1-x^2)\right]\vdots d\Rightarrow 2\vdots d\Rightarrow d=1$ (do d lẻ)	0,5
	Mặt khác, $(1)\Rightarrow(x+1)(x^2+1)$ là số chính phương. $1+x, 1+x^2$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $1+x, 1+x^2$ đều là số chính phương Do x^2, x^2+1 là hai số nguyên liên tiếp và cùng là số chính phương nên $x=0$	0,5
	$x=0\Rightarrow -4y^2+4y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=1\end{array}\right.$. Vậy $(x;y)=(0;0)$ hoặc $(x;y)=(0;1)$	0,25
V. (7,0 điểm)	Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA, CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là D, E. Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F ($0<FA\le FB$). Đường thẳng CF cắt AB tại M, cắt đường tròn (O) tại N (N không trùng với F) và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).	

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	a)Giả sử $\widehat{ACB}=60^0$, tính DE theo R.	**2,0**
		
	Xét đường tròn (O) $\widehat{BCA}=\dfrac{\text{sd}\overset{\frown}{BFA}-\text{sd}\overset{\frown}{DNE}}{2}$ (Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn) $\widehat{BCA}=\dfrac{180^0-\text{sd}\overset{\frown}{DNE}}{2}\Rightarrow \text{sd}\overset{\frown}{DNE}=60^0\Rightarrow \widehat{EOD}=60^0$	0,75
	ΔOED có $OD=OE\Rightarrow \Delta OED$ cân tại O Mà $\widehat{EOD}=60^0\Rightarrow \Delta ODE$ là tam giác đều	0,75
	$\Rightarrow OD=DE\Rightarrow ED=R$	0,5
	b)Chứng minh $CN.CF=CP.CM$.	**1,5**
	$\widehat{CPE}=\widehat{CDE}$ (2 góc nội tiếp chắn cung CE của đường tròn (O')) Mà $\widehat{CBM}=\widehat{CDE}$ (Vì tứ giác ABED nội tiếp đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{CBM}=\widehat{CPE}$ nên tam giác CPE đồng dạng với tam giác CBM $\Rightarrow \dfrac{CE}{CP}=\dfrac{CM}{CB}\Rightarrow CE.CB=CM.CP$ (1)	0,75
	Tương tự chứng minh tam giác CNE đồng dạng với tam giác CBF $\dfrac{CE}{CN}=\dfrac{CF}{CB}\Rightarrow CE.CB=CN.CF$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra: $CN.CF=CP.CM$	0,25
	c) Gọi I,H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng BD,AB. Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại K. Tìm vị trí của điểm F để biểu thức $\dfrac{AB}{FH}+\dfrac{BD}{FI}+\dfrac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.	**1,5**

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Tứ giác BIHF, BDAF nội tiếp nên $\widehat{FHK} = \widehat{FAK}$ (= $\widehat{FBD}$), suy ra tứ giác AKFH nội tiếp nên $\widehat{FKA} = 90^0$.	0,5
	Xét ΔDFK và ΔBFH có $\widehat{FKD} = \widehat{FHB} = 90^0$ và $\widehat{FBH} = \widehat{FDA}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn (O)) $\Rightarrow \Delta DFK \sim \Delta BFH \Rightarrow \frac{DK}{FK} = \frac{BH}{FH}$ (1)	0,25
	Tương tự tam giác IDF đồng dạng với tam giác HAF $\Rightarrow \frac{ID}{IF} = \frac{HA}{HF}$	0,25
	Tương tự tam giác AFK đồng dạng tam giác BFI nên: $\frac{AK}{FK} = \frac{BI}{FI}$ (2) (1) , (2) $\Rightarrow \frac{DK}{FK} - \frac{AK}{FK} = \frac{BH}{FH} - \frac{BI}{FI}$ hay: $\frac{DA}{FK} = \frac{BH}{FH} - \frac{BI}{FI}$ $\Rightarrow \frac{DA}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{BD}{FI} - \frac{BI}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{ID}{FI}$ Mà $\frac{ID}{FI} = \frac{HA}{FH}$ suy ra: $\frac{DA}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{HA}{FH} = \frac{AB}{FH}$	0,25
	Vậy $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK} = \frac{2AB}{FH}$ nên $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK}$ nhỏ nhất khi FH lớn nhất khi F là trung điểm cung AB	0,25
	2. Cho góc $\widehat{xOy}$ cố định và A là điểm cố định trên Ox. Đường tròn (I) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với Ox, Oy lần lượt tại E, D. Gọi AF là tiếp tuyến thứ hai kẻ A từ đến (I) (F là tiếp điểm). Chứng minh DF luôn đi qua một điểm cố định.	**2,0**
		
	Kéo dài DF cắt OI tại J Chứng minh được 4 điểm A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn	0,75
	Chứng minh được $\widehat{JFE} = \widehat{JIE}$ => 4 điểm J, F, I, E cùng thuộc một đường tròn.	0,75
	Do đó 5 điểm A, E, I, F, J cùng thuộc một đường tròn Góc $\widehat{AJI} = 90^0$ => J là điểm cố định	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
VI. (2,0 điểm)	Cho 2 số dương a,b. Chứng minh: $\frac{(a+b-1)^2}{(a+b)^2+1}+\frac{(a-b+1)^2}{(a+1)^2+b^2}+\frac{(b-a+1)^2}{(b+1)^2+a^2}\ge\frac{3}{5}$ (1)	
	$(1)\Leftrightarrow\frac{(a+b-1)^2}{(a+b)^2+1}+\frac{\left(\frac{a+1}{b}-1\right)^2}{\left(\frac{a+1}{b}\right)^2+1}+\frac{\left(\frac{b+1}{a}-1\right)^2}{\left(\frac{b+1}{a}\right)^2+1}\ge\frac{3}{5}$ (*) Đặt $x=\frac{a}{a+b+1};\ y=\frac{b}{a+b+1};\ z=\frac{1}{a+b+1}$ ta được $\frac{b+1}{a}=\frac{1}{x}-1;\frac{a+1}{b}=\frac{1}{y}-1;a+b=\frac{1}{z}-1;$ Vì $a;b>0\ \Rightarrow x;\ y;\ z>0$ Ta lại có $x+y+z=1\ \Rightarrow 0<x;\ y;\ z<1$ Thay vào (*) ta được $\frac{(1-2z)^2}{z^2+(1-z)^2}+\frac{(1-2y)^2}{y^2+(1-y)^2}+\frac{(1-2x)^2}{x^2+(1-x)^2}\ge\frac{3}{5}$	0,5
	$\Leftrightarrow\frac{4z^2-4z+1}{2z^2-2z+1}+\frac{4y^2-4y+1}{2y^2-2y+1}+\frac{4x^2-4x+1}{2x^2-2x+1}\ge\frac{3}{5}$ $\Leftrightarrow\frac{1}{2z^2-2z+1}+\frac{1}{2y^2-2y+1}+\frac{1}{2x^2-2x+1}\le\frac{27}{5}$	0,5
	Ta có $\frac{1}{2t^2-2t+1}\le\frac{9}{5}+\frac{54}{25}\left(t-\frac{1}{3}\right)$ (*) với mọi t thuộc khoảng (0; 1) Thật vậy (*) $\Leftrightarrow\frac{1}{2t^2-2t+1}\le\frac{9}{5}+\frac{18(3t-1)}{25}$ $\Leftrightarrow\frac{18(3t-1)}{25}+\frac{9}{5}-\frac{1}{2t^2-2t+1}\ge0$ $\Leftrightarrow\frac{18(3t-1)}{25}+\frac{18t^2-18t+4}{5(2t^2-2t+1)}\ge0$ $\Leftrightarrow\frac{9(3t-1)}{5}+\frac{(3t-2)(3t-1)}{2t^2-2t+1}\ge0$ $\Leftrightarrow(3t-1)\left[\frac{9}{5}+\frac{3t-2}{2t^2-2t+1}\right]\ge0$ $\Leftrightarrow(3t-1)(18t^2-3t-1)\ge0$ vì $2t^2-2t+1>0\ \forall t$ $\Leftrightarrow(3t-1)^2(6t+1)\ge0$ luôn đúng với mọi t thỏa mãn $0<t<1$ Dấu bằng xảy ra khi $t=\frac{1}{3}$	0,5
	Sử dụng (*) 3 lần cho $x;y;z$ rồi cộng từng vế 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ hay $a=b=1$	0,5

-----HẾT-----