

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

2. Giải phương trình: $\sqrt{3}(x^2 - 3x + 1) = -\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$

Bài 2: (5,0 điểm)

1. Cho các số thực x, y thỏa $x - 2y + 4 < 0.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y^2 - 4x + \frac{4(y^2 - 4x)}{(x - 2y + 4)^2}.$

2. Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$ Biết: $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30.$

Tính giá trị biểu thức $H = \frac{P(12) + P(-8)}{2023}.$

Bài 3: (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm P bất kì nằm trong tam giác (P khác O). Đường thẳng AP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D , dựng các đường kính DE, AF của đường tròn (O) . Gọi G, I lần lượt là các giao điểm thứ hai của đường thẳng EP, FP với đường tròn (O) , K là giao điểm của AI và DG . Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên OP , đường thẳng OP cắt EF tại M .

1. Chứng minh HO là phân giác của góc $\widehat{IHD}.$

2. Chứng minh $KD \perp DM.$

Bài 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong AD, BE, CF cắt nhau tại I . Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{ID}{IA}} + \sqrt{\frac{IE}{IB}} + \sqrt{\frac{IF}{IC}} > 2.$

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh $n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$ Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn $100^\circ.$