

Đề chính thức

Bài 1: (4 điểm).

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1} \right)$ (Với $x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của biểu thức P khi x là nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị là số nguyên.

Bài 2: (4 điểm).

1. Giải phương trình : $\frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{2}{x^2+10x+24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2+3x-18}$

2. Tìm đa thức P(x) thỏa mãn: P(x) chia cho $x + 3$ dư 1; chia cho $x - 4$ dư 8; chia cho $(x + 3)(x - 4)$ được thương là $3x$ và còn dư.

Bài 3: (4 điểm).

1) Tìm số tự nhiên có 9 chữ số: $A = \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$ trong đó $a_1 \neq 0$ và $\overline{b_1b_2b_3} = 2 \cdot \overline{a_1a_2a_3}$ và đồng thời A viết được dưới dạng $A = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdot p_4^2$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là bốn số nguyên tố.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$.

Bài 4: (6 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) gọi AD là tia phân giác của góc BAC. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC; E là giao điểm của BN và DM, F là giao điểm của CM và DN.

a) Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông và $EF \parallel BC$.

b) Gọi H là giao điểm của BN và CM. Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle NFA$ và H là trực tâm $\triangle AEF$.

c) Gọi P là điểm trên AN, Q là điểm trên AM sao cho $AP = MQ$. Tìm vị trí của P và Q để diện tích tứ giác MQPN đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: (2 điểm).

1) Cho $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $S = (2022a^2 + 2022b^2)^{2023}$

2) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{bc}{b^2+c^2} + \frac{ca}{c^2+a^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI 6, 7, 8

NĂM HỌC: 2022 – 2023

Môn: Toán 8

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày giao lưu: 22/03/2023

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1: (4 điểm)	a) Với $x \neq 1$ ta có $P = \left(\frac{x-4}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \left(\frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1} \right)$ $P = \left(\frac{x-4+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \left(\frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1} \right) = \frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} : \frac{x^2+9}{x^2+x+1}$ $= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+9} = \frac{x+3}{x^2+9}$ Vậy $x \neq 1$ thì $P = \frac{x+3}{x^2+9}$	0,5 0,75 0,75
	2) Ta có : $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$ suy ra $x = 2$ hoặc $x = 1$ (loại) Thay $x=2$ vào biểu thức P ta được $P = \frac{2+3}{2^2+9} = \frac{5}{13}$. Kết luận với $x=2$ thì $P = \frac{5}{13}$	0,5 0,5
	c) Ta có : P nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2+9}$ nguyên khi đó $(x+3):(x^2+9) \Rightarrow (x-3)(x+3):(x^2+9)$ $\Rightarrow (x^2-9):(x^2+9) \Rightarrow (x^2+9-18):(x^2+9) \Rightarrow 18:(x^2+9)$ suy ra x^2+9 là ước của 18 Mà $x^2+9 \geq 9 > 0$ nên $x^2+9 \in \{9; 18\}$ nên $x^2 = 0; 9$ ta có $x = 0; 3; -3$ Thử lại ta được $x = -3$ thỏa mãn bài toán và kết luận....	0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 2 4 điểm	1) ĐKXD: $x \neq -1; -4; -6; 3$ $\Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} = \frac{4}{3} + \frac{9}{(x-3)(x+6)}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) = \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+6} \right)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{x-3}$ $\Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{3(x+1)(x-3)} = \frac{4(x+1)(x-3)}{3(x+1)(x-3)} + \frac{3(x+1)}{3(x+1)(x-3)}$ $\Rightarrow 4x^2 - 8x = 0$ $\Leftrightarrow 4x(x-2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{0; 2\}$	0.25 0.25 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25

	2) Vì đa thức $(x+3)(x-4)$ có bậc là 2 nên phần dư khi chia $P(x)$ cho $(x+3)(x-4)$ có dạng $R(x) = ax + b$ $\Rightarrow P(x) = (x+3)(x-4). 3x + ax + b$ Ta có : $\begin{cases} P(-3) = -3a + b = 1 \\ P(4) = 4a + b = 8 \end{cases}$ $\Rightarrow a = 1 ; b = 4$ Vậy: $P(x) = (x+3)(x-4). 3x + x + 4 = 3x^3 - 3x^2 - 35x + 4$	0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 3 4 điểm	1) Ta có: $A = \overline{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 a_1 a_2 a_3} = \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot 10^6 + \overline{b_1 b_2 b_3} \cdot 10^3 + \overline{a_1 a_2 a_3}$ $= \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^3 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3} + \overline{a_1 a_2 a_3}$ $= \overline{a_1 a_2 a_3} (10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1) = \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot 1002001$ $= \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ Như vậy $\overline{a_1 a_2 a_3}$ phải là bình phương của 1 số nguyên tố p khác 7, 11, 13 Do $\overline{b_1 b_2 b_3} < 1000, a_1 \neq 0 \Rightarrow 100 < \overline{a_1 a_2 a_3} < 500$ $\Rightarrow 10 < p < 23 \Rightarrow p \in \{17, 19\} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_1 a_2 a_3} = 289 \\ \overline{a_1 a_2 a_3} = 361 \end{cases}$ Vậy $A = 289578289$ hoặc $A = 361722361$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	2) Ta có : $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2$ $\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2) (*)$ Xét thấy VT chia hết cho 2 nên $3(7 - y^2) : 2 \Rightarrow y$ lẻ (1) Mặt khác VT $\geq 0 \Leftrightarrow 3(7 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 7$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $y^2 = 1$, thay vào (*) ta có: $2(x+1)^2 = 18$ Suy ra các nghiệm là $(x; y) \in \{(2; 1); (2; -1); (-4; -1); (-4; 1)\}$	0.5 0.25 0.25 0.5 0.25 0.25
Bài 4 6 điểm		

	a. (2.0 điểm) * Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông +) Xét tứ giác AMDN có: $\widehat{AMD} = 90^0$; $\widehat{AND} = 90^0$; $\widehat{MAN} = 90^0$ Suy ra tứ giác AMDN là hình chữ nhật +) Hình chữ nhật AMDN có AD là phân giác của $\widehat{MAN}$ nên tứ giác AMDN là hình vuông. * Chứng minh EF // BC. +) Vì ND// AB hay DF//MB áp dụng định lí ta lét ta có: $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1) Vì MD//AC áp dụng định lí ta lét ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}$ (2) Tứ giác AMDN là hình vuông nên $AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN} \quad (3)$ Vì DN//MB áp dụng hệ quả của định lí ta lét với hai tam giác DNE và BME ta có $\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}$ (4) Từ (1),(2),(3),(4) suy ra $\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF // DC$ Hay: $EF // BC$	0.5 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	b) * Chứng minh $\triangle ANB \sim \triangle NFA$ Xét tam giác ANB vuông tại A, tam giác NFA vuông tại N Vì AMDN là hình vuông nên $AN = DN$.suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}$ (5) Vì DN //AB áp dụng hệ quả của định lí ta lét ta có $\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (6) và $\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM} \quad (7)$ Mà AMDN là hình vuông nên $AM = AN$. Suy ra $\frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}$ (8) Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle NFA (c.g.c)$ * Chứng minh H là trực tâm tam giác AEF Vì $\triangle ANB \sim \triangle NFA$ nên $\widehat{NBA} = \widehat{FAN}$ Mà $\widehat{BAF} + \widehat{FAN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{NBA} + \widehat{BAF} = 90^0$ Suy ra $EH \perp AF$ Tương tự: $FH \perp AE$ suy ra H là trực tâm $\triangle AEF$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	c) Vì $AN = AM$; $PN = AQ \Rightarrow AP = MQ$. Ta có : $S_{APQ} = \frac{1}{2} AP.AQ = \frac{1}{2} QM.AQ = \frac{1}{2} AQ(AM - AQ) = -\frac{1}{2}(AQ^2 - AQ.AM)$ $= -\frac{1}{2}(AQ^2 - 2AQ.\frac{AM}{2} + \frac{AM^2}{4}) + \frac{AM^2}{8}$ $= -\frac{1}{2}(AQ - \frac{AM}{2})^2 + \frac{AM^2}{8} \leq \frac{AM^2}{8}$	0.25 0.5 0.25 0.25

	Suy ra : $S_{PQMN} = S_{AMN} - S_{APQ} \geq \frac{1}{2}AM^2 - \frac{1}{8}AM^2 = \frac{3}{8}AM^2$ dấu “=” xảy ra khi $AQ = \frac{AM}{2}$. Vậy diện tích tứ giác PQMN có giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{8}AM^2$ khi Q là trung điểm của AM; P là trung điểm của AN.	0.5
		0.25
Bài 5 2 điểm	1) Ta có $a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow (a^3 - 3ab^2)^2 = 25 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25$ và $b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow (b^3 - 3a^2b)^2 = 100 \Rightarrow b^6 - 6b^4a^2 + 9a^4b^2 = 100$ Suy ra $125 = a^6 + b^6 + 3a^2b^4 + 3a^4b^2$ Hay $125 = (a^2 + b^2)^3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$ Do đó $S = [2022(a^2 + b^2)]^{2023} = (2022 \cdot 5)^{2023} = 10110^{2023}$	0,5
		0,25
		0,25
	2) Ta có:	
	$S = \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ $= \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} + \frac{1}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}} + \frac{1}{\frac{c}{a} + \frac{a}{c}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}\right)$ $= \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} + \frac{1}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}} + \frac{1}{\frac{c}{a} + \frac{a}{c}} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$	0.25
	Đặt	
	$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x$ $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = y$ $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} = z$	
	$S = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{4}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{4}\right) + \frac{3}{4} \geq 1 + 1 + 1 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}, \text{ dấu “=” khi}$ $x^2 = 4, y^2 = 4, z^2 = 4 \text{ suy ra } x = y = z = 2 \text{ (Vì } x, y, z > 0)$ Khi đó $a=b=c = \frac{1}{3}$.	0.25
		0.25

Ghi chú: - Học sinh làm bài cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

- *Bài hình nếu học sinh không vẽ hình hoặc hình sai cơ bản thì không chấm điểm bài hình.*
- *Hướng dẫn chấm gồm 04 trang.*