

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x^2 + 2x}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8} + \frac{2}{x^2 + 4} \right) : \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4x}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \right)$

- Rút gọn biểu thức P.
- Tìm tất cả các số nguyên x sao cho P có giá trị là số nguyên tố.
- Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?

Bài 2. (2,0 điểm)

- Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn :

$$x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$$

- Gọi a là nghiệm nguyên âm của phương trình: $(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 8x + 12) = 252$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2019}{x^{2018} + 2018} + 2018(x^{2019} + 1)$ tại $x = a$

Bài 3. (1,5 điểm)

- Chứng minh rằng với mọi $x > 0, y > 0$, ta luôn có $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

- Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Bài 4. (2,5 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD có $AB > AD$. Tia phân giác của góc BAD cắt BD và CD lần lượt tại E và K. Trên cạnh BD lấy điểm H sao cho AE là tia phân giác của góc CAH. Gọi F là giao điểm của HK và AB.

- Chứng minh rằng hai tam giác AHD và BHA đồng dạng.
- Giả sử $AB = 12\text{cm}$, $AD = 9\text{cm}$. Tính độ dài đoạn BF.
- Chứng minh rằng ba điểm C, E, F thẳng hàng

Bài 5. (1,5 điểm)

- Cho $f(x) = \frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(c-a)}$, với a, b, c là các số

thỏa mãn $a < b < c$. Tính $f(2019)$

- Ban đầu trên bảng có hai số 1 và 4. Một học sinh thực hiện thay đổi như sau:

Mỗi lần chọn hai số a và b trên bảng thì viết thêm số $c = ab + a + b$ lên trên bảng. Hỏi số nhỏ nhất không nhỏ hơn 2019 mà có thể xuất hiện được trên bảng là số nào?

----- Hết -----

(Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ tên thí sinh: Số báo danh