

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm):

Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) \left(x^4 + \frac{1 - x^4}{1 + x^2} \right)$

- a) Rút gọn M
- b) Tìm các giá trị của x để M có giá trị là số nguyên.

Câu 2 (2,0 điểm):

- a) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^3 - 3xy^2 = 10$ và $y^3 - 3x^2y = 30$.
Tính giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2$.

- b) Giải phương trình với ẩn số là x: $\frac{a}{1 - bx} = \frac{b}{1 - ax}$

Câu 3 (2,0 điểm):

- a) Tìm các cặp số (x; y) nguyên thỏa mãn phương trình: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$
- b) Cho số tự nhiên $N = 2017^{2016}$. Viết N thành tổng của k ($k \in \mathbb{N}^*$) số tự nhiên nào đó $n_1; n_2; \dots; n_k$. Đặt $S_n = n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_k^3$. Tìm số dư của phép chia S_n cho 6.

Câu 4 (3,0 điểm): Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

- a) Chứng minh: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$
- b) Chứng minh: H cách đều ba cạnh tam giác DEF
- c) Trên đoạn HB, HC tương ứng lấy điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm):

- a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y}$.

- b) Các số nguyên từ 1 đến 10 được xếp xung quanh một đường tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng với cách xếp đó luôn tồn tại ba số theo thứ tự liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.

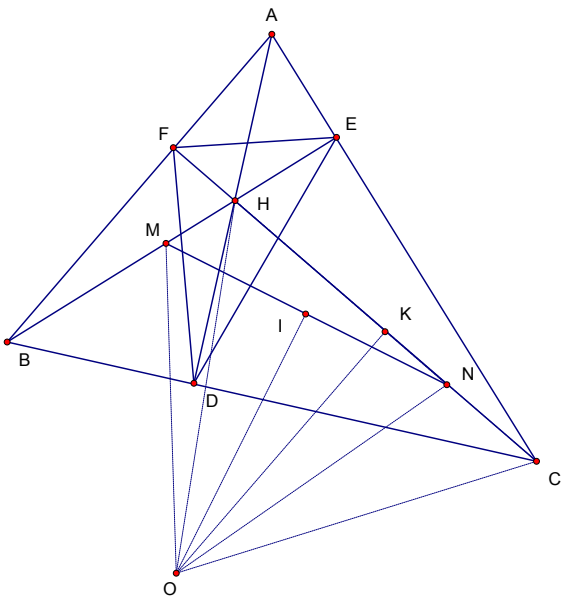
-----Hết-----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm
1(2,0đ)	a) ĐKXĐ : với mọi $x \in \mathbb{R}$	0,25
	$M = \left(\frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) \left(x^4 + \frac{1 - x^4}{1 + x^2} \right)$	0,5
	$= \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1) - x^4 + x^2 - 1}{(x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1)} (x^4 + 1 - x^2)$	0,5
	$= \frac{x^4 - 1 - x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$	0,5
1(2,0đ)	b) Biến đổi: $M = 1 - \frac{3}{x^2 + 1}$, M nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{x^2 + 1}$ nguyên	0,25
	Đặt $\frac{3}{x^2 + 1} = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $k \neq 0$	
	Ta có $kx^2 + k = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3 - k}{k} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < k \leq 3$, mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3\}$	
	$+ k = 1$ thì $x = \pm\sqrt{2}$ và $M = 0$ (thỏa mãn) $+ k = 2$ thì $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $M = -1$ (thỏa mãn) $+ k = 3$ thì $x = 0$ và $M = -2$ (thỏa mãn) Vậy $x \in \{\pm\sqrt{2}; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\}$	0,25
2 (2Đ)	a)	
	Ta có: $x^3 - 3xy^2 = 10 \Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2)^2 = 100 \Leftrightarrow x^6 - 6x^4y^2 + 9x^2y^4 = 100$	0,25
	$y^3 - 3x^2y = 30 \Leftrightarrow (y^3 - 3x^2y)^2 = 900 \Leftrightarrow y^6 - 6x^2y^4 + 9x^4y^2 = 900$	0,25
	Suy ra: $x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = 1000$	0,25
2 (2Đ)	$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^3 = 1000 \Rightarrow x^2 + y^2 = 10$	0,25
	b) Giải phương trình: $\frac{a}{1 - bx} = \frac{b}{1 - ax}$ (1)	
	ĐKXĐ: $x \neq \frac{1}{b}$ và $x \neq \frac{1}{a}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow a(1 - ax) = b(1 - bx) \Leftrightarrow a - a^2x = b - b^2x$ $\Leftrightarrow a^2x - b^2x = a - b \Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a - b$ $+ \text{Nếu } a^2 - b^2 \neq 0 \text{ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất}$ $x = \frac{a - b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a + b}$	

	+ Nếu $a = b$ thì phương trình có dạng: $0x = 0 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có vô số nghiệm $x \neq \frac{1}{b}$ và $x \neq \frac{1}{a}$ + Nếu $a = -b = 0$ thì phương trình có dạng: $0x = 0$ phương trình (1) có vô số nghiệm $x \neq \frac{1}{b}$ và $x \neq \frac{1}{a}$ + Nếu $a = -b \neq 0$ thì phương trình có dạng: $0x = -2b \Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.	0,25
		0,25
		0,25
3	a) Ta có $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)	0,25
	$(x + 2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có $x < y < x + 2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$ Thay $y = x + 1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1; x = 1$.	0,25
	Từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là $(1; 2), (-1; 0)$.	0,25
(2 Đ)	b) Vì $a^3 - a = a(a - 1)(a + 1)$ nên chia hết cho 6 với mọi số nguyên a Đặt $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, ta có:	0,25
	$S - N = (n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_k^3) - (n_1 + n_2 + \dots + n_k) =$ $= (n_1^3 - n_1) + (n_2^3 - n_2) + \dots + (n_k^3 - n_k)$ chia hết cho 6 $\Rightarrow S$ và N có cùng số dư khi chia cho 6	0,25
	Mặt khác, 2017 chia cho 6 dư 1 2017^2 chia cho 6 dư 1 $N = 2017^{2016} = (2017^2)^{1008}$ chia cho 6 dư 1. Vậy S chia cho 6 dư 1.	0,25
		0,25

		
4(3 Đ)	a) Chứng minh: $\triangle BDH \sim \triangle BEC$ $\Rightarrow BH.BE = BD.BC$ và $\triangle CDH \sim \triangle CFB$ $\Rightarrow CH.CF = CD.CB$. $\Rightarrow BH.BE + CH.CF = BC.(BD + CD) = BC^2$ (đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Chứng minh: $\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CBA}$ $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{CED}$ mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF. Tương tự: DA, FC lần lượt là phân giác của góc EDF và góc DFE. Vậy H là giao của các đường phân giác của tam giác DEF Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF (đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) Gọi O là giao điểm của các đường trung trực của các đoạn thẳng MN và HC, ta có $\triangle OMH = \triangle ONC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OHM} = \widehat{OCN}$. (1) Mặt khác ta cũng có $\triangle OCH$ cân tại O nên: $\widehat{OHC} = \widehat{OCH}$. (2) Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{OHC} = \widehat{OHB} \Rightarrow HO$ là phân giác của góc BHC Vậy O là giao điểm của đường trung trực của HC và phân giác của góc BHC nên O là điểm cố định. Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là O	0,25 0,25 0,25
5 (1,0 Đ)	a)	

	$P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y}$ $= \left(\frac{28}{x} + 7x \right) + \left(\frac{1}{y} + y \right) + 2x^2 + y^2 - 7x - y$ $= \left(\frac{28}{x} + 7x \right) + \left(\frac{1}{y} + y \right) + 2(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + (x + y) - 9$ $= \left(\frac{28}{x} + 7x \right) + \left(\frac{1}{y} + y \right) + 2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (x + y) - 9$ do x, y dương. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\frac{28}{x} + 7x \geq 2\sqrt{\frac{28}{x} \cdot 7x} = 28$ $\frac{1}{y} + y \geq 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot y} = 2$ Lại có : $(x - 2)^2 \geq 0$; $(y - 1)^2 \geq 0$; $x + y \geq 3$ suy ra : $P \geq 28 + 2 + 0 + 0 + 3 - 9 = 24$ Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \frac{28}{x} = 7x \\ \frac{1}{y} = y \\ x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ Vậy $P_{\min} = 24$ khi $x = 2$ và $y = 1$	0,25 0,25
	b) Giả sử 10 số được xếp theo thứ tự tùy ý là a,b,c,d,e,f,g,h,i,j. Khi đó có 10 bộ ba số theo thứ tự liên tiếp là: (a; b; c); (b; c; d); (c; d; e); ... (j; a; b). Mỗi số từ 1 đến 10 xuất hiện đúng 3 lần trong 10 bộ số trên. Suy ra tổng các bộ số trên là $S = (a + b + c) + (b + c + d) + \dots + (j + a + b)$ $= 3(1 + 2 + 3 + \dots + 10) = 165.$ Giả sử tất cả các bộ 3 số trên đều có tổng nhỏ hơn hoặc bằng 16 thì: $S \leq 16 \cdot 10 = 160 \text{ (mâu thuẫn)}$ Vậy luôn tồn tại một bộ có tổng lớn hơn hoặc bằng 17. (đpcm)	0,25 0,25