

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay!

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x + y \neq 0, y \neq 0$).

b) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2017$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$.

b) Cho $A = n^6 + 10n^4 + n^3 + 98n - 6n^5 - 26$ và $B = 1 + n^3 - n$. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì thương của phép chia A cho B là bội số của 6.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho a và b thỏa mãn: $a + b = 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^3 + b^3 + 3ab$.

b) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh $DE + DF = 2AM$.

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại N. Chứng minh N là trung điểm của EF.

c) Kí hiệu S_X là diện tích của hình X. Chứng minh $S_{FDC}^2 \geq 16 S_{AMC} \cdot S_{FNA}$.

Câu 5. (1,0 điểm) Trong một đề thi có 3 bài toán A, B, C. Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được bài A thì số thí sinh đã giải được bài B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài C.

- Số học sinh chỉ giải được bài A nhiều hơn số thí sinh giải được bài A và thêm bài khác là một người.

- Số thí sinh chỉ giải được bài A bằng số thí sinh chỉ giải được bài B cộng với số thí sinh chỉ giải được bài C.

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài B?

----- Hết -----

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm!

Họ tên thí sinh.....Số báo danh.....Phòng thi.....

HƯỚNG DẪN CHẤM THI GIAO LƯU HSG LỚP 8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2016 -2017
MÔN: TOÁN 8

Câu	Nội dung	Điểm
	a) $x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$ Vì $x + y \neq 0$ nên $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$. Khi đó $P = \frac{2y - y}{2y + y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$	0,25 0,25 0,5
Câu 1 2 điểm	b) Ta có : $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$ $\Leftrightarrow (x + 1)^2 - (y + 2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x - y - 1)(x + y + 3) = 7$ Vì x, y nguyên dương nên $x + y + 3 > x - y - 1 > 0 \Rightarrow x + y + 3 = 7$ và $x - y - 1 = 1$ $\Rightarrow x = 3; y = 1$ Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x, y) = (3; 1)$	0,25 0,5 0,25
Câu 2 2 điểm	a) Ta có $P(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2017 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2017$ Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), biểu thức $P(x)$ được viết lại: $P(x) = (t - 5)(t + 3) + 2017 = t^2 - 2t + 2002$ Do đó khi chia $t^2 - 2t + 2000$ cho t ta có số dư là 2002 Vậy số dư phải tìm là 2002.	0,25 0,5 0,25
	Thực hiện phép chia, ta được: Thương của A chia cho B là $n^3 - 6n^2 + 11n - 6$ Ta có: $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = n^3 - n + 12n - 6n^2 - 6$ $= (n - 1)n.(n + 1) + 6.(2n - n^2 - 1)$ Vì $(n - 1).n.(n + 1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên tích đó vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 3 suy ra tích đó chia hết cho 6 Mặt khác $6(2n - n^2 - 1)$ chia hết cho 6 $\Rightarrow$ Thương của phép chia A cho B là bội số của 6	0,25 0,25 0,25 0,25

	a) Ta có $B = a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = (a+b)^3 = 1$ (Vì $a+b=1$)	1 điểm
Câu 3 2 điểm	b) $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$ $= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)$	0,25
	Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.	
	Ta có $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1\right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1\right)$ Bởi vậy	0,25
	$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1\right)$ $= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$ Vậy Min $P = \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.	0,25
Câu 4 3 điểm	a) Lập luận được : $\frac{DF}{AM} = \frac{DC}{MC}$ (Do $AM \parallel DF$) (1) $\frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM}$ (Do $AM \parallel DE$) (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{DE + DF}{AM} = \frac{BD + DC}{BM} = \frac{BC}{BM} = 2$ (MB = MC) $\Rightarrow DE + DF = 2 AM$	0,25 0,25 0,25 0,25

	b) AMDN là hình bình hành $\text{Ta có } \frac{NE}{ND} = \frac{AE}{AB}$ $\frac{NF}{ND} = \frac{FA}{AC} = \frac{DM}{MC} = \frac{DM}{BM} = \frac{AE}{AB}$ $\Rightarrow \frac{NE}{ND} = \frac{NF}{ND} \Rightarrow NE = NF$	0,25
		0,25
		0,25
		0,25
	c) ΔAMC và ΔFDC đồng dạng $\Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{FDC}} = \left(\frac{AM}{FD} \right)^2 = \left(\frac{ND}{FD} \right)^2 \text{ (do } AM = ND)$ ΔFNA và ΔFDC đồng dạng $\Rightarrow \frac{S_{FNA}}{S_{FDC}} = \left(\frac{FN}{FD} \right)^2$ Do đó: $\frac{S_{AMC}}{S_{FDC}} \cdot \frac{S_{FNA}}{S_{FDC}} = \left(\frac{ND}{FD} \right)^2 \cdot \left(\frac{FN}{FD} \right)^2 \leq \frac{1}{16} \left(\frac{ND}{FD} + \frac{FN}{FD} \right)^4 = \frac{1}{16}$ $\Rightarrow S_{FDC}^2 \geq 16 S_{AMC} \cdot S_{FNA}$ (Do $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y)^4 \geq 16x^2y^2$ với $x \geq 0; y \geq 0$)	0,25
		0,25
		0,25
		0,25
		0,25
Câu 5 1 điểm	Gọi a là số học sinh chỉ giải được bài A, b là số thí sinh chỉ giải được bài B, c là số thí sinh chỉ giải được bài C, d là số thí sinh giải được 2 bài B và C nhưng không giải được bài A. Khi đó số thí giải được bài A và thêm ít nhất một bài trong hai bài B và C là: 25- a- b- c- d Theo bài ra ta có: $b + d = 2(c + d); \quad a = 1 + 25 - a - b - c - d$ và $a = b + c$. từ các đẳng thức trên ta có: $\begin{cases} 4b + c = 26 \\ d = b - 2c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 2 \end{cases}$ Vậy số thí sinh chỉ giải được bài B là 6 thí sinh	0,25
		0,25
		0,25
		0,25

Chú ý: Học sinh giải theo cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa tương ứng.