

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức : $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$ với $x \neq 0; x \neq 2$.

b) Cho hai số x, y thỏa mãn $x + y = 2$ và $x^2 + y^2 = 10$. Tính giá trị của biểu thức : $M = x^3 + y^3$.

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình : $x^2 - 4x + 6 = \frac{21}{x^2 - 4x + 10}$

b) Giải bất phương trình : $\frac{4}{1 + y + y^2} + \frac{1}{1 - y} \leq \frac{2y^2 - 5}{y^3 - 1}$

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên dương : $3^y = x^2 - 5x + 7$.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Kẻ đường cao AH.

a) Chứng minh rằng : $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$.

b) Kẻ AD là tia phân giác của góc BAH ($D \in BH$). Chứng minh rằng : $DH \cdot DC = BD \cdot HC$.

c) Gọi M là trung điểm của AB, E là giao điểm của hai đường thẳng MD và AH. Chứng minh rằng $CE \parallel AD$.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho $0 < b < a \leq 4$ và $2ab \leq 3a + 4b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

----- HẾT -----

----- Giám thị không giải thích gì thêm -----

Câu	Phần	Nội dung đáp án	Điểm
Câu 1	a	a) Ta có $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$ $= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right)$ $= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \left(\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \right) = \left(\frac{x(x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \right) \left(\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \right)$ $= \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x^2} = \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)}$ $= \frac{x + 1}{2x} \cdot \text{Vậy } A = \frac{x + 1}{2x} \text{ với } x \neq 0; x \neq 2.$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b	+ Ta có $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ + Do đó $10 = 4 - 2xy \Leftrightarrow xy = -3$ + Khi đó $M = x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ + Tính được $M = 2^3 - 3 \cdot (-3) \cdot 2 = 26$ Vậy $M = 26$. <i>Chú ý : Nếu HS tính trực tiếp x và y rồi thay vào M tính vẫn cho điểm tối đa.</i>	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 2	a	Ta có $x^2 - 4x + 10 = (x - 2)^2 + 6 > 0 \forall x$. Phương trình trở thành : $(x^2 - 4x + 6)(x^2 - 4x + 10) = 21 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 8 - 2)(x^2 - 4x + 8 + 2) = 21$ $\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 8)^2 = 25$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 8 = 5 \\ x^2 - 4x + 8 = -5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ (1)} \\ x^2 - 4x + 13 = 0 \text{ (2)} \end{cases}$ - Giải PT (1) được nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 3$. - Giải PT (2) vô nghiệm vì $x^2 - 4x + 13 = (x - 2)^2 + 9 > 0 \forall x$ Vậy tập nghiệm của PT là $S = \{1; 3\}$.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	b	b) ĐK : $y \neq 1$ $\frac{4}{1 + y + y^2} + \frac{1}{1 - y} \leq \frac{2y^2 - 5}{y^3 - 1} \Leftrightarrow \frac{4(1 - y) + 1 + y + y^2}{(1 + y + y^2)(1 - y)} + \frac{2y^2 - 5}{1 - y^3} \leq 0$ $\Leftrightarrow \frac{3y^2 - 3y}{1 - y^3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3y(y - 1)}{1 - y^3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3y(y - 1)}{(1 - y)(1 + y + y^2)} \leq 0$ $\Leftrightarrow \frac{-3y}{1 + y + y^2} \leq 0 \Leftrightarrow -3y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \text{ (do } 1 + y + y^2 > 0)$ Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$	0,25 0,25 0,25 0,25

	a	+ Gọi hai số chính phương liên tiếp lần lượt là a^2 và $(a+1)^2$ ($a \in \mathbb{N}$). + Theo bài ra ta có: $a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ $= (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a+1) + 1$ $= (a^2 + a + 1)^2 = [a(a+1) + 1]^2$ + Do a nguyên nên $a(a+1)$ là số chẵn $\Rightarrow a^2 + a + 1$ là số lẻ. + Vậy $[a(a+1) + 1]^2$ là một số chính phương lẻ. Suy ra đpcm.	0,25
			0,25
			0,25
			0,25
Câu 3	b	Nếu $y \geq 2$ thì vế trái chia hết cho 9, ta chứng minh vế phải không chia hết cho 9. + Thật vậy giả sử $x^2 - 5x + 7 : 9 \Rightarrow x^2 - 5x + 7 : 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 3x + 6 : 3$ $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 : 3 \Rightarrow (x-1)^2 : 3 \Rightarrow (x-1) : 3 \text{ (vì 3 là số nguyên tố).}$ Suy ra x có dạng $x = 3k + 1 (k \in \mathbb{N})$. + Khi đó $x^2 - 5x + 7 = (3k+1)^2 - 5(3k+1) + 7 = 9k^2 - 9k + 3$ không chia hết cho 9 mâu thuẫn giả sử. + Do đó $y < 2$. Suy ra $y \in \{0; 1\}$. - Với $y = 0$ thì $x \in \{2; 3\}$ - Với $y = 1$ thì $x \in \{1; 4\}$ + Vậy $(x; y) = (2; 0), (3; 0), (1; 1), (4; 1)$.	0,25
			0,25
			0,25
			0,25
Câu 4	Hình vẽ		0,25
	a	Chứng minh $\Delta HAB \sim \Delta HCA (g.g)$ $\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{HB}{AH} = \frac{AB}{AC}$ $\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AH}{HC} \cdot \frac{HB}{AH} = \frac{HB}{HC}$ Chú ý : HS có thể chứng minh $AB^2 = BH.BC$ và $AC^2 = CH.BC$ rồi chia vế.	0,25
			0,25

	b	$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAC} + \widehat{A_1} = 90^\circ \\ + \text{ Chứng minh được : } \widehat{ADC} + \widehat{A_2} = 90^\circ \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \Delta ADC \text{ cân tại C}$	0,25
		$\Rightarrow CA = CD.$	
		+ Chứng minh được $\frac{DH}{DB} = \frac{AH}{AB}$ (tính chất đường phân giác)	0,25
		+ Chứng minh được $\frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{CD}$ (tam giác đồng dạng và do $CA = CD$)	0,25
	c	+ Suy ra được $\frac{DH}{DB} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow DH \cdot DC = BD \cdot HC$	0,25
		+ Dựng N là điểm đối xứng của D qua M $\Rightarrow AN = BD.$	0,25
		$\left. \begin{array}{l} \frac{DH}{AN} = \frac{HE}{AE} \\ \frac{DH}{AN} = \frac{DH}{DB} = \frac{CH}{CD} \text{ (cmt) } \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{HE}{AE} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow \frac{HE}{AH} = \frac{CH}{DH}$	0,25
		+ Suy ra được $\Delta HCE \sim \Delta HDA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{DAH}$ + Mà hai góc ở vị trí SLT nên $CE \parallel AD.$	0,25
Câu 5		+ Với $0 < b \leq 3, 0 < b < a \leq 4$ thì $P = a^2 + b^2 \leq 3^2 + 4^2 = 25$	0,25
		Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4; b = 3.$	
		+ Chứng minh được bất đẳng thức $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (1)	0,25
		+ Với $3 < b < a \leq 4$ thì $0 < a - b < 4 - 3 = 1$. Do đó $(a - b)^2 < a - b$	
		$\Rightarrow P = a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab < a - b + 2ab \leq a - b + (3a + 4b) = 4a + 3b$ (2)	0,25
		Áp dụng (1) ta có $(3a + 4b)^2 \leq (3^2 + 4^2)(a^2 + b^2) = 25(a^2 + b^2)$ (3)	
		Từ (2) và (3) suy ra $(a^2 + b^2)^2 < 25(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 < 25$	
		+ Vậy $\text{Max}(P) = 25$ khi $a = 4; b = 3.$	0,25

