

Câu 1 (2,0 điểm) Thực hiện phép tính

a) $(0,6 - 75\%) : \left(\frac{1}{5} - 1\frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{8^5 \cdot 25^7}{125^5 \cdot 4^7}$

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Tìm x, biết $\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x\right) = -\left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13}\right)$

2) Chứng tỏ phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n.

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Tìm x, y, z biết $5x = 6y$; $3y = 2z$ và $5x - 7y + 9z = 250$

2) Cho đa thức $A(x) = x^4 - 123x^3 + 123x^2 - 123x + 125$. Tính $A(122)$?

3) Cho 2 đa thức $P = 5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3$

$$Q = \frac{1}{2}x^3 - 2x^4 + 4x^2 + x + \frac{7}{2}x^3$$

Tìm đa thức H, biết $P - H = Q - (x^2 + 3x - 7)$

Câu 4 (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và $AB < AC$. Kẻ $BE \perp AC$ tại E, $CF \perp AB$ tại F, BE cắt CF tại H. Kẻ $HQ \parallel AC$, $HP \parallel AB$ ($Q \in AB$, $P \in AC$).

a) Chứng minh rằng: $\triangle AHQ = \triangle HAP$

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tam giác MEF cân và $\overline{AEF} = \overline{ABC}$.

c) Chứng minh rằng: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$

2) Một trường THCS làm bể tập bơi cho học sinh có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 15m, chiều rộng 10m, chiều sâu 1,2m. Người ta lát gạch men các mặt xung quanh và đáy của bể (Coi mạch ghép giữa các viên gạch men không đáng kể).

a) Tính diện tích gạch men cần dùng để lát bể bơi đó?

b) Cần phải bơm bao nhiêu mét khối nước vào bể để mực nước trong bể thấp hơn mép trên của bể là 20cm (Ban đầu bể không có nước) ?

Câu 5 (1,0 điểm) Chứng minh $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$

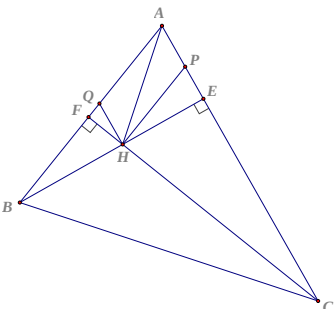
----- Hết -----

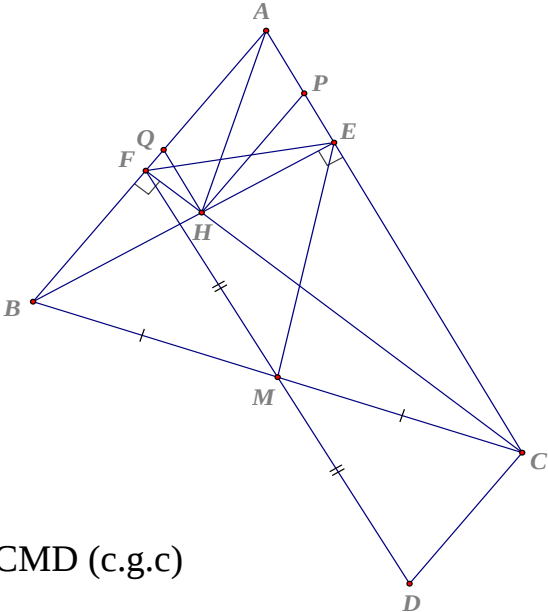
Chú ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Chú ý:

- Phần nào HS làm theo cách khác mà đúng chuẩn KT – KN thì vẫn cho điểm tối đa của phần đó.
- GV chấm có thể chia nhỏ biểu điểm cho phù hợp (nếu cần), nhưng phải thống nhất trong nhóm chấm.

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
1	a)	$(0,6 - 75\%) : \left(\frac{1}{5} - 1\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{7}{4}\right)$	0,25
		$= \left(\frac{12}{20} - \frac{15}{20}\right) : \left(\frac{4}{20} - \frac{35}{20}\right)$	0,25
		$= \frac{-3}{20} : \frac{-31}{20}$	0,25
		$= \frac{3}{31}$	0,25
	b)	$\frac{8^5 \cdot 25^7}{125^5 \cdot 4^7} = \frac{(2^3)^5 \cdot (5^2)^7}{(5^3)^5 \cdot (2^2)^7}$	0,50
		$= \frac{2^{15} \cdot 5^{14}}{5^{15} \cdot 2^{14}}$	0,25
		$= \frac{2}{5}$	0,25
2	1)	$\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x\right) = -\left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13}\right)$	0,25
		$\frac{11}{13} - \frac{5}{42} + x = -\frac{15}{28} + \frac{11}{13}$	
		$x = -\frac{15}{28} + \frac{5}{42}$	
		$x = -\frac{5}{12}$	
		Vậy $x = -\frac{5}{12}$.	0,25
	2)	Gọi ước chung của $n - 4$ và $3n - 11$ là d	0,25

		$\Rightarrow \begin{cases} n-4 \vdots d \\ 3n-11 \vdots d \end{cases}$	
		$\Rightarrow \begin{cases} 3n-12 \vdots d \\ 3n-11 \vdots d \end{cases}$	0,25
		Do đó $(3n-12) - (3n-11) = -1 \vdots d \Rightarrow d = \pm 1$	0,25
		Vậy phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n.	0,25
3	1)	Ta có $3y = 2z$ nên $6y = 4z$ Mà $5x = 6y$ suy ra $5x = 6y = 4z$	0,25
		$\Rightarrow \frac{5x}{60} = \frac{6y}{60} = \frac{4z}{60} = \frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$	0,25
		Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{5x-7y+9z}{5 \cdot 12 - 7 \cdot 10 + 9 \cdot 15} = \frac{250}{125} = 2$	0,25
		Suy ra $x = 24; y = 20; z = 30$	0,25
		2) Khi $x = 122$ thì ta có $123 = x + 1$ Do đó $A(x) = x^4 - (x+1).x^3 + (x+1).x^2 - (x+1).x + 125$	0,25
		$= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + 125$ $= -x + 125$	0,25
		Suy ra $A(122) = -122 + 125 = 3$	
	3)	Vì $P - H = Q - (x^2 + 3x - 7)$ Nên $H = P - [Q - (x^2 + 3x - 7)]$ $= P - Q + (x^2 + 3x - 7)$	0,25
		Ta có $P - Q = (5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3) - (\frac{1}{2}x^3 - 2x^4 + 4x^2 + x + \frac{7}{2}x^3)$ $= 5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^4 - 4x^2 - x - \frac{7}{2}x^3$ $= -x^2 - 2x + 3$ Suy ra $H = -x^2 - 2x + 3 + x^2 + 3x - 7$ $= x - 4$ Vậy $H = x - 4$	0,25
4	1)	Học sinh vẽ hình đúng theo dữ kiện chung của đề bài 	0,25

	a) Xét $\triangle AHQ$ và $\triangle HAP$, có $\angle QAH = \angle PHA$ (2 góc so le trong) AH là cạnh chung $\angle QHA = \angle PAH$ (2 góc so le trong) Suy ra $\triangle AHQ = \triangle HAP$ (g.c.g)	0,25
	b) Lấy điểm D sao cho M là trung điểm của FD  Chứng minh $\triangle BMF = \triangle CMD$ (c.g.c) $\Rightarrow BF = CD$ và $BF \parallel CD$ Từ đó chứng minh được $\triangle BFC = \triangle DCF$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = FD = 2FM$ Chứng minh tương tự $BC = 2EM$ $\Rightarrow FM = EM = BM = CM$ $\Rightarrow$ tam giác EFM cân tại M. $\Rightarrow$ Tương tự các tam giác BMF, EMC cân tại M Từ đó chứng minh được $\angle AEF = 180^\circ - \angle FEM - \angle MEC = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle EMF}{2} - \frac{180^\circ - \angle EMC}{2}$ $\Rightarrow \angle AEF = \frac{\angle EMF + \angle EMC}{2} = \frac{\angle FMC}{2} = \frac{2\angle ABC}{2} = \angle ABC$ (Do $\angle FMC$ là góc ngoài của $\triangle BFM$) Vậy $\angle AEF = \angle ABC$	0,25
	c) Theo a, ta có $\triangle AHQ = \triangle HAP$ $\Rightarrow HQ = AP$ và $AQ = HP$ Xét $\triangle AHQ$ có $AH < HQ + AQ$ (bất đẳng thức tam giác) $\Rightarrow AH < AQ + AP$ (1) Mặt khác $HQ \parallel AC$, mà $BH \perp AC \Rightarrow HQ \perp BH$ Chứng minh tương tự ta được $CH \perp HP$ $\Rightarrow BH < BQ$ và $CH < CP$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow HA + HB + HC < AB + AC$ (3)	0,25

		Chứng minh tương tự ta có $HA + HB + HC < AC + BC$ (4) $HA + HB + HC < AB + BC$ (5) Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$	
	2)	Học sinh không phải vẽ hình	
		a) Diện tích xung quanh bể là: $2.(15 + 10).1,2 = 60 \text{ (m}^2\text{)}$	0,25
		Diện tích đáy bể là: $15.10 = 150 \text{ (m}^2\text{)}$	0,25
		Diện tích gạch men dùng để lát là: $60 + 150 = 210 \text{ (m}^2\text{)}$	0,25
		b) Đổi $20\text{cm} = 0,2\text{m}$	0,25
		Chiều cao của mực nước trong bể cần bơm là: $1,2 - 0,2 = 1 \text{ (m)}$	0,25
		Thể tích nước cần bơm vào bể là: $15.10.1 = 150 \text{ (m}^3\text{)}$	0,25
		$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}}$ Nên ta có $4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2023}{4^{2022}}$	0,25
		$4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}} - \frac{2023}{4^{2023}}$ $3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$	0,25
5		Đặt $A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$ $4A = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{2021}}$ $4A - A = 4 - \frac{1}{4^{2022}}$ $3A < 4 \Rightarrow A < \frac{4}{3}$	0,25
		Suy ra $S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ Vậy $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$	0,25