

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Tính giá trị biểu thức: $\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

2. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$. Chứng minh:

$$\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$$

3. Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0$.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Tìm x, biết: $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| = 101x$

2. Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

3. Biết $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7; chia cho $x - 2$ thì dư 5; chia cho $(x - 3) \cdot (x - 2)$ được thương là $3x$ và còn dư. Tìm $f(x)$.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Tìm các số tự nhiên a; b sao cho: $(2008 \cdot a + 3 \cdot b + 1) \cdot (2008^a + 2008 \cdot a + b) = 225$

2. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Bài 4: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.

Bài 5: (2,0 điểm) Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

----- HẾT -----

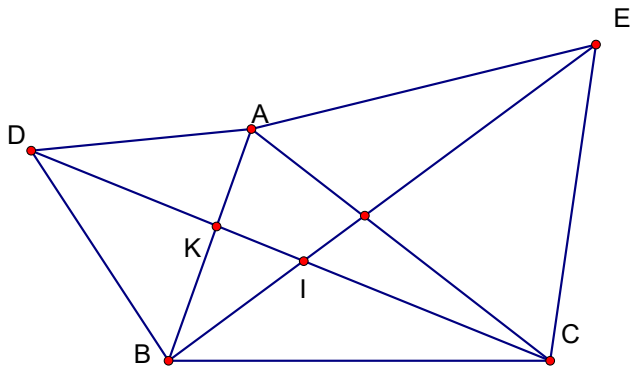
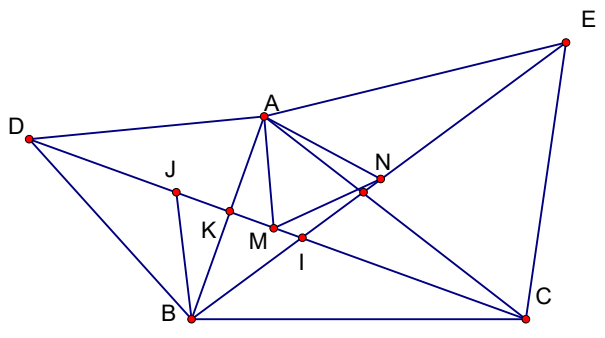
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

PHÒNG GD & ĐT HUYỆN CẨM THỦY -----***-----	ĐÁP ÁN ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2022- 2023 Môn thi : Toán - Lớp 7 Thời gian : 150 phút (không kể thời gian giao đề) Ngày thi :/....../2023 <i>(Đáp án gồm 05 trang)</i>
---	--

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 1 (4 điểm)	1. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{2^{12}.3^5 - 4^6.9^2}{(2^2.3)^6 + 8^4.3^5} - \frac{5^{10}.7^3 - 25^5.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3}$	
	$\frac{2^{12}.3^5 - 4^6.9^2}{(2^2.3)^6 + 8^4.3^5} - \frac{5^{10}.7^3 - 25^5.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3}$	0,5
	$= \frac{2^{12}.3^5 - 2^{12}.3^4}{2^{12}.3^6 + 2^{12}.3^5} - \frac{5^{10}.7^3 - 5^{10}.7^4}{5^9.7^3 + 5^9.2^3.7^3}$	
	$= \frac{2^{12}.3^4(3-1)}{2^{12}.3^5(3+1)} - \frac{5^{10}.7^3(1-7)}{5^9.7^3(1+8)}$	0,5
	$= \frac{2^{12}.3^4.2}{2^{12}.3^5.4} - \frac{5^{10}.7^3.(-6)}{5^9.7^3.9}$	
	$= \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2}$	0,5
	Vậy $A = \frac{7}{2}$	
	2. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$. Chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$	
	Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \left(\frac{a-c}{b-d}\right)^{2013} \quad (1)$	0,5
	Mà: $\left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013}}{b^{2013}} = \frac{c^{2013}}{d^{2013}} = \frac{a^{2013} + c^{2013}}{b^{2013} + d^{2013}} \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}} \quad (\text{đpcm})$	0,5
	3. Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0$	
	Ta có: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$ $\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$ Lại có: $\begin{cases} (2x-5)^{2018} \geq 0 \\ (3y+4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \geq 0$	0,5

	Mà: $(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2018} = 0 \\ (3y+4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$. Thay vào ta được $M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$	0,5
Bài 2 (4 điểm)	1. Tìm x, biết: $\left x + \frac{1}{101}\right + \left x + \frac{2}{101}\right + \left x + \frac{3}{101}\right + \dots + \left x + \frac{100}{101}\right = 101x$	
	Vì $\left x + \frac{1}{101}\right + \left x + \frac{2}{101}\right + \left x + \frac{3}{101}\right + \dots + \left x + \frac{100}{101}\right > 0$ nên $101x > 0$ Suy ra: $x > 0$	0,5
	Từ đó ta bỏ được dấu giá trị tuyệt đối thu được phương trình sau: $(x + \frac{1}{101}) + (x + \frac{2}{101}) + (x + \frac{3}{101}) + \dots + (x + \frac{100}{101}) = 101x$ $\Rightarrow (x + x + \dots + x) + (\frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}) = 101x$	0,5
	$\Rightarrow 100x + \frac{1}{101}(1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 101x$ $\Rightarrow \frac{1}{101} \frac{(1+100) \cdot [(100-1):1 + 1]}{2} = x \Rightarrow x = 50$ (TM)	0,5
	2. Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.	
	Gọi ba phần được chia lần lượt là: a, b, c Theo bài ra ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ Ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10}$	0,5
	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{576 + 2025 + 100} = \frac{24309}{2701} = 9$ $\Rightarrow a^2 = 576 \cdot 9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$ $b^2 = 2025 \cdot 9 = 18225 \Rightarrow b = \pm 135$ $c^2 = 100 \cdot 9 = 900 \Rightarrow c = \pm 30$	0,5
	Vì: $\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow a, b, c$ cùng dấu. $\Rightarrow A = -72 + (-135) + (-30) = -237$ Hoặc: $A = 72 + 135 + 30 = 235$ Vậy: $A = -135$ hoặc $A = 135$	0,5

Bài 3 (4 điểm)	3. Biết $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7; chia cho $x - 2$ thì dư 5; chia cho $(x - 3).(x - 2)$ được thương là $3x$ và còn dư. Tìm $f(x)$.	
	Theo bài ra, ta có: $f(x) = (x - 3).A(x) + 7$ (1) $f(x) = (x - 2).B(x) + 5$ (2) $f(x) = 3x(x - 3)(x - 2) + ax + b$ (3) Các đẳng thức trên đúng với mọi x nên: +) Thay $x = 2$ vào (2); (3) được: $2a + b = 5$ (4) +) Thay $x = 3$ vào (1); (3) được: $3a + b = 7$ (5)	0,5
	Từ (4) và (5), suy ra: $a = 2; b = 1$ Do đó dư là $2x + 1$ Vậy $f(x) = 3x(x - 3)(x - 2) + 2x + 1 = 3x^3 - 15x^2 - 20x + 1$	0,5
	1. Tìm các số tự nhiên $a; b$ sao cho: $(2008.a + 3.b + 1).(2008^a + 2008.a + b) = 225$	
	Theo đề bài $\Rightarrow 2008a + 3b + 1$ và $2008^a + 2008a + b$ là 2 số lẻ. Nếu $a \neq 0 \Rightarrow 2008^a + 2008a$ là số chẵn	0,5
	Để $2008^a + 2008a + b$ lẻ $\Rightarrow b$ lẻ Nếu b lẻ $\Rightarrow 3b + 1$ chẵn do đó $2008a + 3b + 1$ chẵn (không thỏa mãn)	0,5
	Với $a = 0 \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 225$ Vì $b \in \mathbb{N} \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 3.75 = 5.45 = 9.25$	0,5
	Mặt khác: $3b + 1$ không chia hết cho 3 và $3b + 1 > b + 1$ $\Rightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ b + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow b = 8$ Vậy $a = 0; b = 8$.	0,5
	2. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3	
	Ta có $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$	0,5
	Mà $3c^3 - 15d^3 : 3$ nên $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 : 3$ (1)	0,5
	Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0; \pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0; \pm 1\}$ hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$ Tương tự ta có $b \equiv b^3 \pmod{3}; c \equiv c^3 \pmod{3}; d \equiv d^3 \pmod{3}$ $\Rightarrow a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3}$ (2)	0,75
	Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3	0,25

Bài 4 (6 điểm)		0,25
	a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.	
	Ta có: $AD = AB$; $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ và $AC = AE$ Suy ra: $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)	1,5
	b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^\circ$.	
	Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ Lại có: $\widehat{BKI} = \widehat{AKD}$ (đối đỉnh)	0,75
	Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$, suy ra $\widehat{BIK} = \widehat{DAK} = 60^\circ$ (đpcm)	0,75
	c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.	
		0,25
	Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\widehat{ACM} = \widehat{AEN}$	0,5
	$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\widehat{CAM} = \widehat{EAN}$ $\widehat{MAN} = \widehat{CAE} = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều.	0,5
	d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.	
	Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và $\widehat{JBI} = \widehat{DBA} = 60^\circ$	0,5
	Suy ra: $\widehat{IBA} = \widehat{JBD}$, kết hợp $BA = BD$ $\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{DJB} = 120^\circ$ mà $\widehat{BID} = 60^\circ$	0,5
	$\Rightarrow \widehat{DIA} = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE	0,5
	Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$	
	Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a-1 \leq 0 \\ b-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab - a - b + 1 \geq 0$	0,5

Bài 5 (2 điểm)	$\Rightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (c \geq 0)$	0,5
	Mà: $\frac{c}{a+b} \leq \frac{2c}{a+b+c} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c}$ Chúng minh tương tự, ta có: $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{2b}{a+b+c}$ và $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{2a}{a+b+c}$	0,5
	Cộng theo vế, ta được: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$ (đpcm) Vậy với ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ thì $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$	0,5

Chú ý:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Bài hình nếu không vẽ hình hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm điểm.