

Chú ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay!**Bài 1 (5,0 điểm).**

a) Tính giá trị biểu thức: $A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2018}{2019}$

b) Tìm các số x, y biết: $2019|2x-1| + 5(x+2y)^{24} = 0$

c) Cho hàm số $y = f(x) = ax + \frac{8}{9}$. Tìm các giá trị của a , biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm

$$M(a+2; 3a^2+2a).$$

Bài 2 (3,0 điểm).

a) Cho các số a, b, c thỏa mãn $\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa). Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c}$.

b) Cho $\overline{ab}, \overline{bc}$ ($c \neq 0$) là các số có hai chữ số thỏa mãn điều kiện: $\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{\overline{bc}}{b+c}$.

Chứng minh rằng: $b^2 = ac$.

Bài 3 (3,0 điểm).

a) Cho các số nguyên dương m, n và p là số nguyên tố thỏa mãn: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$.

Chứng minh rằng: $p^2 = n+2$.

b) Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn: $\frac{a}{3} - \frac{4}{b} = \frac{1}{5}$.

Bài 4 (2,0 điểm). Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5;6;7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4;5;6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói tăm. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Bài 5 (2,0 điểm). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Tia phân giác của các góc $\widehat{HAC}$ và $\widehat{HAB}$ lần lượt cắt BC ở D, E . Tính độ dài đoạn thẳng DE , biết $AB = 5cm, AC = 12cm$.

Bài 6 (3,0 điểm). Cho $\triangle ABC$ cân tại B, có $\widehat{ABC} = 80^\circ$. Lấy điểm I nằm trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ICA} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{AIB}$.

Bài 7 (2,0 điểm). Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ được xác định như sau:

$$a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots; a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

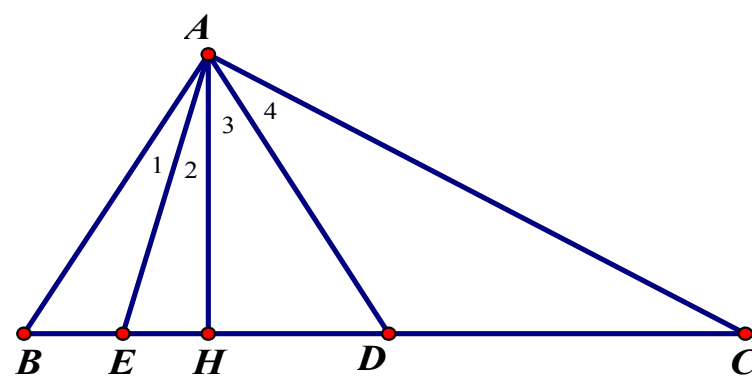
Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

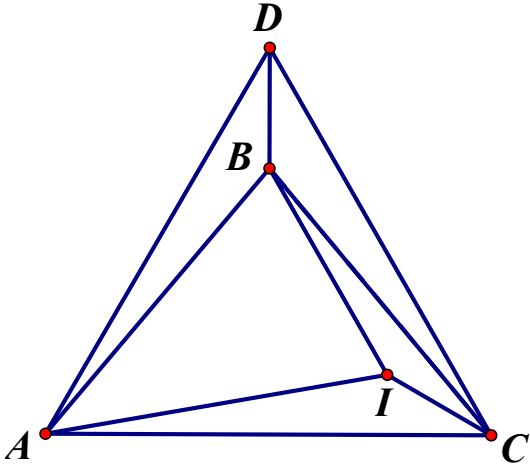
===== HẾT =====

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

ĐÁP ÁN + HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung trình bày	Điểm
Bài 1	Câu a (2,0 điểm). $A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2018}{2019} = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{1}{10}} \right) : \frac{2018}{2019}$ $A = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{1}{10}} \right) : \frac{2018}{2019} = \left(\frac{2(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11})}{7(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11})} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5})} \right) : \frac{2018}{2019}$ $A = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2018}{2019} = 0$	0,5
	Câu b (1,5 điểm). Ta có: $ 2x - 1 \geq 0, \forall x \text{ nên } 2019 2x - 1 \geq 0 \text{ với mọi } x.$ $(x + 2y)^2 \geq 0, \forall x, y \text{ nên } 5(x + 2y)^{24} \geq 0 \text{ với mọi } x, y.$ Do đó: $2019 2x - 1 + 5(x + 2y)^{24} = 0$ thì $2x - 1 = 0$ và $x + 2y = 0$ Từ đó suy ra: $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{4}$	0,5
	Câu c (1,5 điểm) Do đồ thị hàm số đi qua điểm $M(a + 2; 3a^2 + 2a)$ nên có: $3a^2 + 2a = a(a + 2) + \frac{8}{9}$ $\Rightarrow 3a^2 + 2a = a^2 + 2a + \frac{8}{9} \Rightarrow 2a^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{9}$ Từ đó tìm được $a = \pm \frac{2}{3}$	0,5
	Câu a (1,5 điểm). Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a} = \frac{6}{2(a+b+c)} = \frac{3}{a+b+c}$ Từ đó ta có: $\frac{3}{a+b} = \frac{3}{a+b+c}$ suy ra $a+b = a+b+c \Rightarrow c = 0$ Do đó: $P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c} = \frac{a+b}{a+b} = 1$	0,5
Bài 2	Câu b (1,5 điểm) Ta có: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} \Leftrightarrow \frac{10a+b}{a+b} = \frac{10b+c}{b+c} \Leftrightarrow \frac{9a+(a+b)}{a+b} = \frac{9b+(b+c)}{b+c}$ Từ đó suy ra: $\frac{9a}{a+b} + 1 = \frac{9b}{b+c} + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c}$ Từ $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow a(b+c) = b(a+b) \Rightarrow ab + ac = ab + b^2 \Rightarrow b^2 = ac$	0,5
		0,5
		0,5

Bài 3	Câu a (1,5 điểm) Theo giả thiết ta có: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p} (*)$ +) Nếu $m+n:p$ thì từ (*) suy ra $p:(m-1)$. Do p là số nguyên tố nên $m-1=1$ hoặc $m-1=p$. Từ đó suy ra $m=2$ hoặc $m=p+1$. Với $m=2$ hoặc $m=p+1$ thay vào (*) ta có: $p^2=n+2$ +) Nếu $m+n$ không chia hết cho p. Từ (*) $\Rightarrow (m+n)(m-1)=p^2$ Do p là số nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m-1=p^2$ và $m+n=1$ $\Leftrightarrow m=p^2+1$ và $n=-p^2<0$ (loại) Vậy $p^2=n+2$	0,5												
		0,5												
		0,5												
	Câu b (1,0 điểm). Ta có: $\frac{a}{3} - \frac{4}{b} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{a}{3} - \frac{1}{5} = \frac{4}{b} \Leftrightarrow \frac{5a-3}{15} = \frac{4}{b} \Leftrightarrow (5a-3)b=60$. Suy ra: $5a-3 \in U(60) = \{\pm 60, \pm 30, \pm 20, \pm 15, \pm 12, \pm 10, \pm 6, \pm 4, \pm 5, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$ mà $5a-3$ chia 5 dư -3 hoặc 2 nên có: <table><tr><td>$5a-3$</td><td>-3</td><td>2</td><td>12</td></tr><tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>b</td><td>-20</td><td>15</td><td>5</td></tr></table>	$5a-3$	-3	2	12	a	0	1	3	b	-20	15	5	0,5
$5a-3$	-3	2	12											
a	0	1	3											
b	-20	15	5											
		0,5												
		0,5												
Bài 4	Bài 4(2,0 điểm) Gọi tổng số gói tăm ba lớp đã mua là $x, x \in \mathbb{N}^*$ Gọi a, b, c là số gói tăm dự định chia theo thứ tự cho các lớp 7A, 7B, 7C ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$) Theo bài ra và áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{5+6+7} = \frac{x}{18}$ Suy ra: $a = \frac{5x}{18}; b = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$ (1) Gọi a', b', c' là số gói tăm đã chia theo thứ tự cho các lớp 7A, 7B, 7C ($a', b', c' \in \mathbb{N}^*$) Theo bài ra và áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{4+5+6} = \frac{x}{15}$ Suy ra: $a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15}$ (2) So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ Do đó lớp 7C nhận nhiều hơn 4 gói tăm. Khi đó: $c'-c = \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Leftrightarrow \frac{36x-35x}{90} = 4 \Leftrightarrow x=360$ Vậy số gói tăm cả ba lớp đã mua là 360 gói.	0,5												
			0,5											
			0,5											
Bài 5														
	Trong tam giác vuông AHE có: $\widehat{AEC} = 90^\circ - \widehat{A_2}$													

	Do tam giác ABC vuông tại A nên: $\widehat{EAC} = 90^\circ - \widehat{A_1}$ Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (GT) nên suy ra: $\triangle ACE$ cân tại C $\Rightarrow AC = CE$. Chứng minh tương tự: $\triangle ABD$ cân tại B $\Rightarrow AB = BD$. Do đó: $AB + AC = CE + BD = CD + BD + DE = BC + DE$. $\Rightarrow DE = AB + AC - BC$ Theo định lí Py-ta-go: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BC = 13$ (cm). Vậy $DE = 5 + 12 - 13 = 4$ (cm).	0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 6		
	Do $\triangle ABC$ cân tại B, có $\widehat{ABC} = 80^\circ$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 50^\circ$ Vì $\widehat{ICA} = 10^\circ$ và $\widehat{ICB} = 30^\circ$ nên $\widehat{IAB} = 40^\circ$ và $\widehat{ICB} = 20^\circ$ Trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B vẽ tam giác đều ACD suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 10^\circ$. Ta có: $\triangle ABD = \triangle CBD$ (c.g.c) nên $\widehat{BDA} = \widehat{BDC} = 60^\circ : 2 = 30^\circ$ Khi đó: $\triangle ABD = \triangle AIC$ (g.c.g) $\Rightarrow AB = AI$ nên $\triangle BAI$ cân tại A. Do đó: $\widehat{AIB} = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.	0,5 0,5 0,5 0,5 1,0
Bài 7	Với mọi $\forall k \geq 2$ ta có: $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$). Ta có: $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$ Suy ra $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$ Cho $k = 2; 3; \dots; n$ ta có: $\frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \dots; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$ Cộng theo về ta được: $\frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$ $\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2$ (đpcm)	0,5 0,5 0,5