

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm):

a, Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $a + c = 0$.

Chứng minh rằng $f(1).f(-1) \leq 0$.

b, Tìm các số x, y, z biết rằng $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x + 3y - z = -186$

Câu 2 (2,0 điểm):

a, Với giá trị nguyên nào của x thì biểu thức $A - \frac{14-x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất?

b, So sánh biểu thức P với $\frac{1}{2}$, biết

$$P = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \dots + \frac{2017}{2015!+2016!+2017!} \quad (\text{với } n! = 1.2.3 \dots n)$$

Câu 3 (2,0 điểm):

a, Chứng minh rằng số $\sqrt{2017}$ là số vô tỉ.

b, Tìm tất cả các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$.

Câu 4 (2,5 điểm):

Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{BAC} = 140^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, kẻ tia Cx sao cho $\widehat{ACx} = 110^\circ$. Gọi D là giao điểm của các tia Cx và BA. Chứng minh rằng AD = BC.

Câu 5 (1,5 điểm):

a, Cho p và q là hai số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Tìm số dư khi chia $p + q$ cho 12.

b, Cho A là một tập hợp gồm 10 chữ số, $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$. B là một tập con của A gồm 5 phần tử. Chứng minh rằng trong tập hợp các số có dạng $x + y$, với x, y là hai phần tử phân biệt thuộc B, có ít nhất 2 số có cùng chữ số hàng đơn vị.

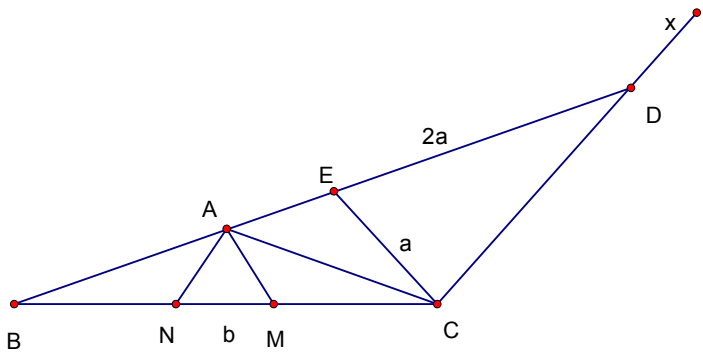
c, Với mỗi số nguyên dương a, kí hiệu S(a) là số chữ số của a. Tìm số nguyên dương n để $S(5^n) - S(2^n)$ là số chẵn.

-----Hết-----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Câu	Nội dung	Điểm
1	a, Ta có $f(1)=a+b+c$, $f(-1)= a-b+c$. suy ra $f(1)+f(-1)=2(a+c)=0$	0,5
2đ	Do đó $f(1)$ và $f(-1)$ là hai số đối nhau, suy ra $f(1).f(-1) \leq 0$.	0,5
	b, Từ giả thiết và theo t/c của dãy tỷ số bằng nhau, ta có : $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x + 3y + z}{30 + 60 + 28} = \frac{186}{62} = -3$	0,5
	Do đó $x=-45$, $y=-60$, $z=-84$	0,5
2	a, Biến đổi $A = 1 + \frac{10}{4-x}$, A lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất.	0,25
2đ	- Nếu $x > 4$ thì $\frac{10}{4-x} < 0$ (1) - Nếu $x < 4$ thì $\frac{10}{4-x} > 0$. Phân số $\frac{10}{4-x}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên có GTLN khi mẫu nhỏ nhất.	0,25
	Mẫu số $4-x$ là số nguyên dương, nhỏ nhất khi $4-x=1$ suy ra $x=3$. Khi đó $\frac{10}{4-x} = 10$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta thấy $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất bằng 10. Vậy GTLN của A =11 khi $x=3$	0,25
	b, Ta có $\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$	0,5
	Áp dụng với $n=1,2,...,2015$, ta được $P = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2016!} - \frac{1}{2017!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2017!} < \frac{1}{2}$	0,5
3	a, Giả sử $\sqrt{2017}$ là số hữu tỉ, đặt $\sqrt{2017} = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1$	0,25
2đ	Ta có $\frac{m^2}{n^2} = 2017 \Rightarrow m^2 = 2017n^2 \Rightarrow m : 2017$. Suy ra $m=2017k$ (k là số tự nhiên)	0,25
	Suy ra $n^2 = 2017k^2 \Rightarrow n : 2017$.	
	Do đó $(m,n)=2017$ (trái với giả thiết)	0,25
	Vậy $\sqrt{2017}$ là số vô tỉ	0,25
	b, Nếu $x \geq 3, y \geq 3, z \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1 < 2$	0,25
	Vậy trong 3 số x,y,z phải có ít nhất một số nhỏ hơn 3.	0,25

	Gọi $x \leq y, x \leq z \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x = 1; x = 2$	
	Nếu $x=1$ suy ra $y=z=2$ Nếu $x=2$ suy ra $y=2, z=2$ (Loại)	0,25
	Vậy $(x,y,z)=(1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)$	0,25
4 2,5 đ		
	- Kẻ CE vuông góc với CD, đặt $CE=a$ thì $ED=2a$	0,5
	-Trên BC lấy M,N sao cho $\widehat{BAN} = 40^\circ, \widehat{CAM} = 40^\circ$	0,5
	-Ta có $\widehat{MAN} = 60^\circ, \widehat{CAE} = 40^\circ$	0,5
	- $\triangle NAB = \triangle MAC = \triangle EAC$ (g.c.g) $\Rightarrow NB = MC = EC = a$	0,5
	- Tam giác MAN đều. Đặt $AM=MN=b$ thì $AE=b$. Do đó $AD=b+2a$, $BC=b+2a$ Vậy $BC=AD$.	0,5
5	a, Vì q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với k là STN. Nếu $q=3k+1$ thì $p=3k+3$ (loại)	0,25
1,5 đ	Nếu $q=3k+2$ thì $p=3k+4$, vì q là SNT > 3 nên k lẻ. ta có $p+q=6(k+1)$, chia hết cho 12 vì $k+1$ chẵn. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 bằng 0.	0,25
	b, Giả sử trong các số có dạng $x+y$, với x,y là hai phân tử phân biệt thuộc B, không tồn tại 2 số có cùng chữ số hàng đơn vị. Khi đó các tổng này đều khác nhau. Giả sử $B = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5\}$. Gọi C là tập hợp các số có dạng $x+y$, với x,y là hai phân tử phân biệt thuộc B.	0,25
	Ta có $C = \{a_1 + a_2; a_1 + a_3; \dots; a_4 + a_5\}$. Ta thấy C có 10 phần tử và tổng các phần tử là $4(a_1 + a_2 + \dots + a_5)$, là một số chẵn. Mặt khác, 10 số trong C đều có chữ số hàng đơn vị khác nhau nên các chữ số hàng đơn vị này là 10 chữ số khác nhau 0,1,2,...,9. Mà $1+2+\dots+9=45$ là số lẻ (vô lý) suy ra điều phải chứng minh.	0,25
	c, Giả sử 2^n có a chữ số, 5^n có b chữ số. Vì 2^n và 5^n đều không thể tận cùng bằng chữ số 0, nên $10^{a-1} < 2^n < 10^a$ và $10^{b-1} < 5^n < 10^b$	0,25
	Suy ra $10^{a+b-2} < 10 < 10^{a+b}$, do đó $a+b-2 < n < a+b$. Vậy $n=a+b-1$, mặt khác $a-b$ và $a+b$ là hai số cùng tính chẵn lẻ, nên $a-b$ chẵn khi $a+b$ chẵn. Khi đó n là số lẻ.	0,25