

Câu I. (4,0 điểm).

1) Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$

b) $B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

c) $C = (\frac{1}{2^2} - 1) \cdot (\frac{1}{3^2} - 1) \cdot (\frac{1}{4^2} - 1) \dots (\frac{1}{2023^2} - 1)$

2. Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính giá trị biểu thức : $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$.

Câu II. (4,0 điểm).

1. Tìm x, y, z thỏa mãn: $4x = 3y; 4y = 3z$ và $2x + y - z = -14$

2. Tìm số nguyên tố p sao cho p+2, p+6, p+8, p+14 cũng là số nguyên tố

3. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x + y)^4 = 40x + 41$.

Câu III. (4,0 điểm).

1. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$

2. Cho $A = x^{100} - 100x^{99} + 100x^{98} - 100x^{97} + \dots - 100x + 2122$. Tính A khi x=99

Câu IV. (6,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm D trên đoạn thẳng AB (D khác A và B), đường thẳng vuông góc với MD tại M cắt AC tại E.

a) Chứng minh: MD = ME.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho CK = BD, DK cắt BC tại I, đường vuông góc với DK tại I cắt AM tại S. Chứng minh: I là trung điểm của DK và SC vuông góc với AK.

c) Chứng minh: MD + ME ≥ AD + AE.

Câu V. (2,0 điểm).

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$, chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

.....**HẾT**.....

Câu	Phần	Nội dung	Điểm
I 4đ	a	$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{1}{6} + \frac{4}{35} + \frac{1}{41}$	
	1đ	$= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{1}{6} - \frac{4}{35} + \frac{1}{41}$	
		$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{7} - \frac{4}{35}\right) + \frac{1}{41}$	0.25
		$= \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{14}{35} + \frac{25}{35} - \frac{4}{35}\right) + \frac{1}{41}$	0.25
		$= 1 + 1 + \frac{1}{41} = 2 + \frac{1}{41} = 2\frac{1}{41}$	0.25
		Vậy $A = 2\frac{1}{41}$	0.25
	b	$b. B = \frac{2^{12}.3^5 - 4^6.9^2}{(2^2.3)^6 + 8^4.3^5} - \frac{5^{10}.7^3 - 25^5.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3}$	
	1đ	$= \frac{2^{12}.3^5 - (2^2)^6.(3^2)^2}{(2^2.3)^6 + (2^3)^4.3^5} - \frac{5^{10}.7^3 - (5^2)^5.(7^2)^2}{[(5^3).7]^3 + 5^9.(2.7)^3} = \frac{2^{12}.3^5 - 2^{12}.3^4}{2^{12}.3^6 + 2^{12}.3^5} - \frac{5^{10}.7^3 - 5^{10}.7^4}{5^9.7^3 + 5^9.2^3.7^3}$	0.25
		$= \frac{2^{12}.3^4(3-1)}{2^{12}.3^5(3+1)} - \frac{5^{10}.7^3(1-7)}{5^9.7^3(1+2^3)}$	0.25
		$= \frac{2^{12}.3^4.2}{2^{12}.3^5.4} - \frac{5^{10}.7^3(-6)}{5^9.7^3.9} = \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{1}{6} + \frac{20}{6} = \frac{7}{2}$	0.25
		Vậy $B = \frac{7}{2}$	0.25
	c	$C = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2023^2} - 1\right)$	
	1đ	$= \frac{1-2^2}{2^2} \cdot \frac{1-3^2}{3^2} \cdot \frac{1-4^2}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{1-2023^2}{2023^2} = \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-9}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{-4092528}{2023^2}$	0.25
		$= \frac{3}{2^2} \cdot \frac{9}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{4092528}{2023^2} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{2022.2024}{2023^2}$	0.25
		$= \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{2022.2024}{2023^2} = \frac{1.3.2.4.3.5 \cdot \dots \cdot 2022.2024}{2^2.3^2.4^2 \cdot \dots \cdot 2023^2}$	0.25
		$= \frac{(1.2.3.4.5 \cdot \dots \cdot 2022)(3.4.5 \cdot \dots \cdot 99.2024)}{(2.3.4.5 \cdot \dots \cdot 99.2023)(2.3.4.5 \cdot \dots \cdot 2023)} = \frac{1.2024}{2023.2} = \frac{1012}{2023}$	0.25
		Vậy $C = \frac{1012}{2023}$	
	d	+ Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c; b + c = -a; a + c = -b$	
	1đ	Khi đó $P = (-1) + (-1) + (-1) = -3$	0.25
		+ Nếu $a + b + c \neq 0$ thì : $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$	0.25
		Suy ra $b + c = 2a; c + a = 2b; a + b = 2c$	

		Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 6$ Vậy : $P = -3$ hoặc $P = 6$.	0.25 0.25
II 4đ	a 1,5đ	Ta có: $4x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}; 4y = 3z \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{16}$ $\Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16}$ Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16} = \frac{2x}{18} = \frac{2x+y-z}{18+12-16} = \frac{-14}{14} = -1$ Suy ra: $x = -9; y = -12; z = -16$ Vậy $x = -9; y = -12; z = -16$	0.5 0.5 0.25 0.25
	b 1,5đ	a, Giả sử với $p = 2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p + 2 = 4:2$ là hợp số $\Rightarrow p = 2(l)$ +Với $p = 3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p + 6 = 9:3$ là hợp số $\Rightarrow p = 3(l)$ +Với $p = 5$ là số nguyên tố $\Rightarrow$ $p + 2 = 7, p + 6 = 11, p + 8 = 13, p + 14 = 19$ đều là số nguyên tố +Với $p > 5 \Rightarrow p = 5k + 1, p = 5k + 2, p = 5k + 3, p = 5k + 4, (k \in \mathbb{N})$ -Nếu $p = 5k + 1 \Rightarrow p + 14 = 5k + 1 + 14 = 5k + 15:5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p + 14$ là hợp số $\Rightarrow p = 5k + 1(l)$ -Nếu $p = 5k + 2 \Rightarrow p + 8 = 5k + 10:5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p + 8$ là hợp số $\Rightarrow p = 5k + 1(l)$ -Nếu $p = 5k + 3 \Rightarrow p + 2 = 5k + 5:5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p + 2$ là hợp số $\Rightarrow p = 5k + 3(l)$ -Nếu $p = 5k + 4 \Rightarrow p + 6 = 5k + 4 + 6 = 5k + 10:5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p + 6$ là hợp số $\Rightarrow p = 5k + 4(l)$ Vậy $p=5$ là số nguyên tố cần tìm	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	c 1đ	Do x, y nguyên dương nên $40x < 41x, 41 \leq 41y$. Khi đó, ta có: $(x + y)^4 = 40x + 41 < 41x + 41y < 41x + 41y = 41(x + y)$ $\Leftrightarrow (x + y)^3 < 41 < 64 = 4^3 \Rightarrow x + y < 4 \quad (1)$ Do x nguyên dương nên $40x + 41 \geq 40.1 + 41 = 81 \Rightarrow (x + y)^4 \geq 81$ $\Rightarrow x + y \geq 3 \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $x + y = 3$ mà $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $(x; y) = (1; 2), (2; 1)$ Qua thử lại được $x = 1, y = 2$.	0.25 0.25 0.25 0.25
III 4đ	a 2đ	Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$ $\Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{2022a^2}{2022b^2} = \frac{2023c^2}{2023d^2} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$ Vậy $\frac{a.c}{b.d} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$	1 0,75 0,25
	b	Thay $x=99$ vào biểu thức A ta được:	

	2đ	$A = 99^{100} - 100.99^{99} + 100.99^{98} - 100.99^{97} + \dots - 100.99 + 2122$ $= 99^{100} - (99+1).99^{99} + (99+1).99^{98} - (99+1).99^{97} + \dots - (99+1).99 + 2122$ $= 99^{100} - 99^{100} - 99^{99} + 99^{99} + 99^{98} - 99^{98} - 99^{97} + \dots - 99^2 - 99 + 99 + 2023$ $= 2023$ Vậy Khi $x=99$ thì $A = 2023$	0,25 0,5 0,5 0,5 0,25
IV 6đ		Vẽ hình ghi GT,KL	0.5 đ
	a 1,5đ	-Ta có: $\widehat{AMD} + \widehat{AME} = 90^\circ$ ($MD \perp ME$) và $\widehat{AME} + \widehat{CME} = 90^\circ$ ($AM \perp BC$) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{CME}$ -c/m: $\widehat{BAM} = \widehat{ACM} = 45^\circ$; $AM = MC$ -Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CME$ có: $AM = CM$; $\widehat{AMD} = \widehat{CME}$; $\widehat{MAD} = \widehat{ACM} = 45^\circ$ $\Rightarrow \triangle AMD = \triangle CME$ (g.c.g) $\Rightarrow MD = ME$	0,5 0,25 0,5 0,25
	b 2đ	Hạ DP, KQ vuông góc với BC tại P và Q Chứng minh: I là trung điểm của DK Chứng minh: $\triangle BDP = \triangle CKQ$ suy ra $DP = KQ$ Chứng minh: $\triangle PID = \triangle QIK$ suy ra $DI = IK$, hay I là trung điểm của DK Chứng minh: $SC \perp AK$ Chứng minh: $\triangle ABS = \triangle ACS$ suy ra $\widehat{ABS} = \widehat{ACS}$ (1) Chứng minh: $\triangle SBD = \triangle SCK$ suy ra $\widehat{SBD} = \widehat{SCK}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{ACS} = \widehat{SCK}$ Mà $\widehat{ACS} + \widehat{SCK} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACS} = 90^\circ \Rightarrow SC \perp AK$	0,25 0,25 0,5 0,25 0,25 0,25 0,25
	c 2đ	Gọi giao điểm của DM với SC là F. chứng minh $\triangle MDB = \triangle MFC \Rightarrow MD = MS \Rightarrow M$ là trung điểm của DF Từ F kẻ $FH \perp AB$ tại H. Chứng minh $\triangle FAH = \triangle AFC \Rightarrow FH = AC$	0,5 0,5

