SỞ GD VÀ ĐT BẮC NINH CỤM TRƯỜNG THPT GIA BÌNH, THUẬN THÀNH, LƯƠNG TÀI *(Đề thi gồm 7 trang)*	ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI THPT NĂM HỌC 2022 - 2023 **Môn**: *Toán - Lớp 12* Ngày thi: 8 tháng 01 năm 2023 *Thời gian: 90 phút (không kể thời gian phát đề)*

Mã đề thi 101

Họ và tên thí sinh:... SBD:....................

Câu 1. Cho $a=\log_2 3; b=\log_5 2;$ và $\log_{12}\left(\frac{9}{125}\right)=\frac{m.ab-n}{p.ab+q.b}$ (m,n là các số nguyên tố). Giá trị của $m+n+p+q$ bằng

A. 4 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 6

Câu 2. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $1-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$

B. $x^2+\ln(x-1)+C.$

C. $x^2+\ln|x-1|+C.$

D. $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C.$

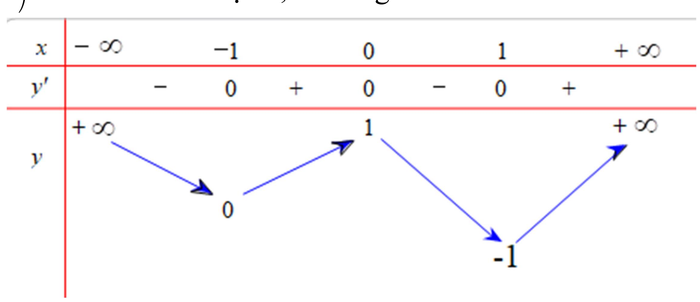
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3,\ AC=4, BC=5$ và góc giữa các cạnh bên với đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $15\sqrt{3}$ **B.** $5\sqrt{3}$ **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 4. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(x-1).\log_2(2^x-7)=0$ là

A. $1+\log_2 7$ **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm của phương trình $|f(|x|)-1|=1$ là

A. 4 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 6

Câu 6. Gọi m,n lần lượt là số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^3-x}$. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 5

Câu 7. Cho hàm $y=f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)^m(x^3-x);\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[1;99]$ để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$?

A. 44 **B.** 50 **C.** 99 **D.** 49

Câu 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB=BC=a$, $AA'=a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1=1$ và $a_n=10a_{n-1}-1$, $\forall n\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n>100$

A. 102. **B.** 103. **C.** 100. **D.** 101.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tập nghiệm của bất phương trình $(x-m)(3^x-2^x)\le 0$ chứa không quá 8 giá trị nguyên?

A. 15 **B.** 16 **C.** 8 **D.** 17

Câu 11. Cho hai khối trụ có cùng thể tích; bán kính đáy và chiều cao của hai khối trụ lần lượt là R_1,h_1 và R_2,h_2. Biết rằng $\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{3}{2}$. Tỉ số $\dfrac{h_1}{h_2}$ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 12. Cho phương trình $2\cos^2 3x+(3-2m)\cos 3x+m-2=0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$. là

A. 1 **B.** 4 **C.** 3. **D.** 2

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ (C) và $d: y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=4$. **B.** $k_1.k_2=2$. **C.** $k_1.k_2=3$. **D.** $k_1.k_2=\dfrac{1}{4}$.

Câu 14. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ bằng

A. $3+2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

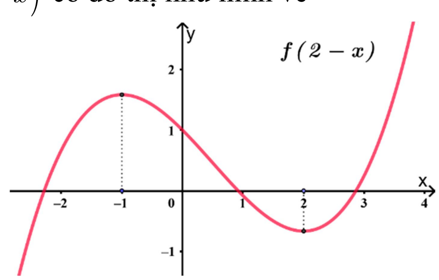
Câu 15. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $\widehat{ASB}=20°$, $\widehat{BSC}=30°$, $\widehat{CSA}=40°$. Mặt phẳng (α) bất kì qua A cắt SB, SC tại B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\Delta AB'C'$.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Câu 16. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA=a$, $AB=b$, $BC=c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$.

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y=f(2-x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(1;3)$

Câu 18. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\left(x^2 - 3\right)$ trên $\left[0;2\right]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 4

Câu 19. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp \left(ABCD\right)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK \perp SD$ tại K. Tính thể tích của khối cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K?

A. $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$. **B.** $V = \sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi α là góc hợp bởi đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$. Khi đó, giá trị $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

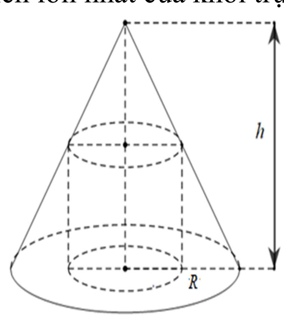
Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 5 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{6} - 2$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{4\sqrt{6}}{3} - 2$. **D.** $2\sqrt{6} - 2$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A\left(1;0;1\right)$, $B\left(2;1;2\right)$, $D\left(1;-1;1\right)$, $C'\left(4;5;-5\right)$. Tọa độ của điểm A' là:

A. $A'\left(4;6;-5\right)$. **B.** $A'\left(-3;4;-1\right)$. **C.** $A'\left(3;5;-6\right)$. **D.** $A'\left(3;5;6\right)$.

Câu 23. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



A. 6π. **B.** 8π. **C.** 4π. **D.** 10π.

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y = x^{-3} + \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $D = \left(-\infty;-1\right) \cup \left(1;+\infty\right)$ **B.** $D = \left(-1;1\right) \setminus \left\{0\right\}$

C. $D = \left(0;1\right)$ **D.** $D = \left(-1;1\right)$

Câu 25. Biến cố A liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên T có hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$. **B.** $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{1}{P\left(A\right)}$.

C. $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{n\left(\Omega\right)}{n\left(\overline{A}\right)}$. **D.** $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{n\left(\Omega \setminus A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } x\le 1\\ 4-x & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_1^3 f\left(x-1\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 27. Tính thể tích của một hình hộp chữ nhật biết rằng ba mặt của hình này có diện tích là $20\,\mathrm{cm}^2, 10\,\mathrm{cm}^2, 8\,\mathrm{cm}^2$.

A. $1600\,\mathrm{cm}^3$ **B.** $80\,\mathrm{cm}^3$ **C.** $40\,\mathrm{cm}^3$ **D.** $38\,\mathrm{cm}^3$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^a kf(t)dt=0$ **B.** $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$

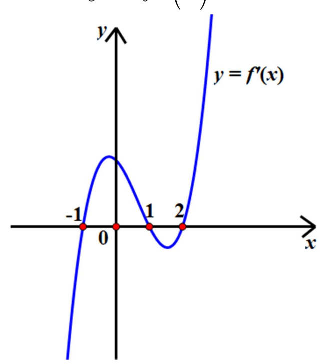
C. $\int\limits_a^b f(2x)dx=2\int\limits_{2a}^{2b} f(x)dx$ **D.** $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(t)dt$

Câu 29. Quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=(x-3)\sqrt{\log_{0,5}x+1}$, trục Ox, và đường thẳng $x=1$ ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\int\limits_2^3 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$. **B.** $\pi\int\limits_1^3 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$.

C. $\pi\int\limits_1^2 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$. **D.** $\int\limits_1^2 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



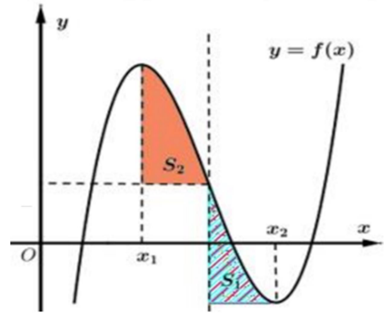
Hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-2x\right)$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=-1$; **B.** $x=0$ **C.** $x=-1; x=2$ **D.** $x=\frac{1}{2}; x=1$

Câu 31. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=2^{\frac{(x-1)^2}{2x}}$ là

A. 4 **B.** 1 **C.** 5 **D.** 3

Câu 32. Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+4$ và $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



A. $\frac{3}{5}$.   **B.** $\frac{3}{8}$.   **C.** $\frac{5}{3}$.   **D.** $\frac{8}{5}$.

Câu 33. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left(m^2-2m\right)e^x-2mx-m^2+2m\geq 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 2   **B.** 0   **C.** 5   **D.** 4

Câu 34. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+bx^2+cx+3$ thỏa mãn $\min\limits_{(0;2)} f\left(x\right)=f\left(1\right)=1$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)$ là

A. 17   **B.** 55   **C.** $3-\sqrt{2}$ **D.** 5

Câu 35. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)=x^3-3x^2-10x;\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị?

A. 5   **B.** 2   **C.** 3   **D.** 4

Câu 36. Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{e}^x\left(5\cos^2x+\cos x+\sin x\right)}{\cos^2x}\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{b}}+c$, với a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$?.

A. 10.   **B.** 2.   **C.** 4.   **D.** 16.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1$, $AD=\sqrt{10}$, $SA=SB$, $SC=SD$. Biết mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SCD\right)$ vuông góc nhau đồng thời tổng diện tích của hai tam giác ΔSAB và ΔSCD bằng 2. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. 2.   **B.** 1.   **C.** $\frac{3}{2}$.   **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 38. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng R. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$.   **B.** $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.   **C.** $\tan\alpha=1$.   **D.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2,\forall x\in[1;4],f(1)=\frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\frac{391}{18}$.   **B.** $\frac{361}{18}$.   **C.** $\frac{381}{18}$.   **D.** $\frac{371}{18}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp\left(ABC\right);AB=2a\sqrt{2},BC=3a,\widehat{ABC}=45^0$. Gọi I là trực tâm của tam giác SBC. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $I.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{2}$.   **B.** $\frac{a^3}{4}$.   **C.** a^3.   **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

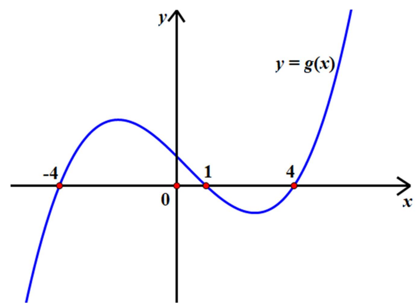
Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2-64x\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5 **B.** 19 **C.** 6 **D.** 24

Câu 42. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 3 điểm chia đều cạnh tương ứng thành các phần bằng nhau. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu. Lấy ra từ S một tam giác, xác suất để mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho bằng

A. $\dfrac{2}{45}$. **B.** $\dfrac{9}{34}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{15}$

Câu 43. Cho các hàm số $y=f(x); y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g(x)=\left(f(2-x)\right)'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ **B.** $(1;2)$ **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$ **D.** $(-2;0)$

Câu 44. Cho các hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}; g(x)=ax^5+bx^3+cx$ $(a>0;b>0)$ và $g(3)=-\dfrac{7}{3}; g(9)=81$.

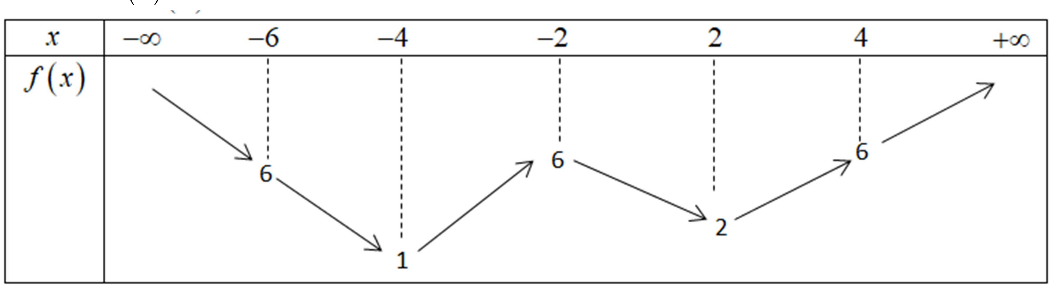
Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(g(1-2x)\right)+f\left(1-m^2+2g(x+4)\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 15 **B.** 17 **C.** 19 **D.** 0

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)=e^{|x-2|}+\ln\left(x^2-4x+5\right)$. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ với $x\in\mathbb{Z}; y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f\left(x^2+y^2\right)=f(2x+4y)$?

A. 12 **B.** 11 **C.** 8 **D.** 4

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y=\left|\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}}{f\left(\dfrac{32x}{x^2+16}\right)}-f(m)\right| \text{ nhỏ hơn } \frac{16}{3}?$$

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 47. Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình trụ (T) bất kì nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối trụ (T) là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Câu 48. Cho phương trình $3^{x^2+2mx+4m-3}-2=\left|\frac{m-2}{x+m}\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-6;0]$?

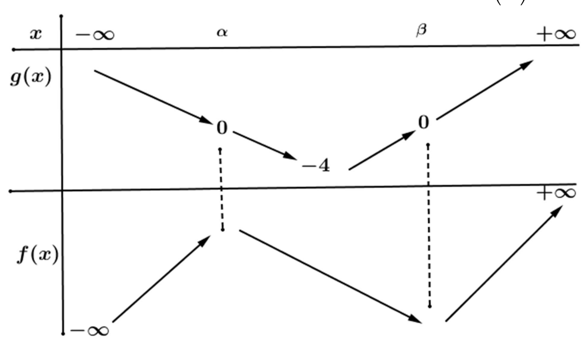
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn

$[f'(x)]^2=4.[2x^2+1-f(x)]$ với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$ và $f(1)=2$. Giá trị $I=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 50. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3-3x^2+bx+1-2d$ và $g(x)=cx^2-2x+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=30$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),y=g(x),x=-3,x=6$ bằng



A. $\frac{1123}{12}$. **B.** $\frac{1231}{12}$. **C.** $\frac{1321}{12}$. **D.** $\frac{2113}{12}$.

------------- **HẾT** -------------

Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu gì.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD VÀ ĐT BẮC NINH
CỤM TRƯỜNG THPT GIA BÌNH, THUẬN THÀNH, LƯƠNG TÀI

(Đề thi gồm 7 trang)

ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: *Toán - Lớp 12*
Ngày thi: 8 tháng 01 năm 2023
Thời gian: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Mã đề thi 102

Họ và tên thí sinh:.. SBD:....................

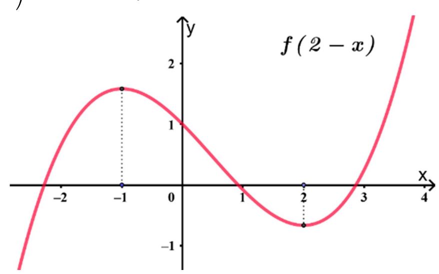
Câu 1. Cho hai khối trụ có cùng thể tích; bán kính đáy và chiều cao của hai khối trụ lần lượt là R_1, h_1 và R_2, h_2. Biết rằng $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{3}{2}$. Tỉ số $\dfrac{h_1}{h_2}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Câu 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = 20°$, $\widehat{BSC} = 30°$, $\widehat{CSA} = 40°$. Mặt phẳng (α) bất kì qua A cắt SB, SC tại B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\Delta AB'C'$.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y = f(2-x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(-\infty;-1)$

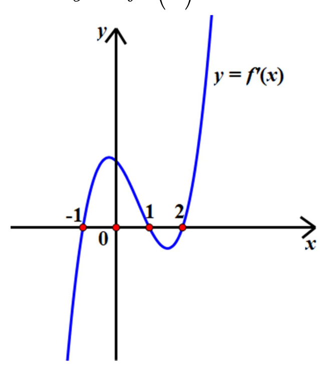
Câu 4. Gọi m, n lần lượt là số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{x}}{x^3 - x}$. Giá trị của $m + n$ bằng

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Câu 5. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $a_n = 10a_{n-1} - 1$, $\forall n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$

A. 102. **B.** 103. **C.** 100. **D.** 101.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=-1;$ **B.** $x=0$ **C.** $x=-1;x=2$ **D.** $x=\dfrac{1}{2};x=1$

Câu 7. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $1-\dfrac{1}{(x-1)^2}+C.$

B. $x^2+\ln(x-1)+C.$

C. $x^2+\ln|x-1|+C.$

D. $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C.$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của điểm A' là:

A. $A'(3;5;-6)$. **B.** $A'(3;5;6)$. **C.** $A'(4;6;-5)$. **D.** $A'(-3;4;-1)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;\,b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^a kf(t)dt=0$

B. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$

C. $\int\limits_a^b f(2x)dx=2\int\limits_{2a}^{2b} f(x)dx$

D. $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(t)dt$

Câu 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB=BC=a$, $AA'=a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA=a$, $AB=b$, $BC=c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ (C) và $d:y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=3$. **B.** $k_1.k_2=4$. **C.** $k_1.k_2=\dfrac{1}{4}$. **D.** $k_1.k_2=2$.

Câu 13. Cho hàm $y=f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)^m(x^3-x);\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[1;99]$ để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$?

A. 44 **B.** 50 **C.** 99 **D.** 49

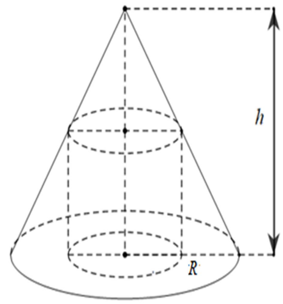
Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f(|x|)-1\right|=1$ là

A. 6 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4

Câu 15. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



A. 6π. **B.** 8π. **C.** 4π. **D.** 10π.

Câu 16. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $3+2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 17. Tính thể tích của một hình hộp chữ nhật biết rằng ba mặt của hình này có diện tích là $20\,\text{cm}^2, 10\,\text{cm}^2$, $8\,\text{cm}^2$.

A. $1600\,\text{cm}^3$ **B.** $80\,\text{cm}^3$ **C.** $40\,\text{cm}^3$ **D.** $38\,\text{cm}^3$

Câu 18. Quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=(x-3)\sqrt{\log_{0,5}x+1}$, trục Ox, và đường thẳng $x=1$ ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\int_1^2 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\text{dx}$. **B.** $\int_2^3 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\text{dx}$.

C. $\pi\int_1^3 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\text{dx}$. **D.** $\pi\int_1^2 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\text{dx}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3, AC=4, BC=5$ và góc giữa các cạnh bên với đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $15\sqrt{3}$ **B.** $5\sqrt{3}$ **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{5}{3}$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $2\sqrt{6}-2$. **B.** $\sqrt{6}-2$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}-2$.

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi α là góc hợp bởi đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+z-1=0$. Khi đó, giá trị $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22. Cho phương trình $2\cos^2 3x+(3-2m)\cos 3x+m-2=0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$. là

A. 1 **B.** 4 **C.** 3. **D.** 2

Câu 23. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp \left(ABCD\right)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK \perp SD$ tại K. Tính thể tích của khối cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K?

A. $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ 4 - x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_1^3 f\left(x-1\right)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(x-m\right)\left(3^x - 2^x\right) \le 0$ chứa không quá 8 giá trị nguyên?

A. 8 **B.** 17 **C.** 15 **D.** 16

Câu 26. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\left(x^2 - 3\right)$ trên $\left[0;2\right]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 0 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 27. Tập xác định của hàm số $y = x^{-3} + \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $D = \left(-\infty;-1\right) \cup \left(1;+\infty\right)$ **B.** $D = \left(0;1\right)$

C. $D = \left(-1;1\right)$ **D.** $D = \left(-1;1\right) \setminus \left\{0\right\}$

Câu 28. Biến cố A liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên T có hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{n\left(\Omega \setminus A\right)}{n\left(\Omega\right)}$. **B.** $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{1}{P\left(A\right)}$.

C. $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{n\left(\Omega\right)}{n\left(\overline{A}\right)}$. **D.** $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

Câu 29. Cho $a = \log_2 3; b = \log_5 2;$ và $\log_{12}\left(\dfrac{9}{125}\right) = \dfrac{m.ab - n}{p.ab + q.b}$ (m, n là các số nguyên tố). Giá trị của $m + n + p + q$ bằng

A. 6 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2

Câu 30. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x-1\right).\log_2\left(2^x - 7\right) = 0$ là

A. $1 + \log_2 7$ **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 31. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng R. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1;4], f(1) = \dfrac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\dfrac{371}{18}$. **B.** $\dfrac{391}{18}$. **C.** $\dfrac{361}{18}$. **D.** $\dfrac{381}{18}$.

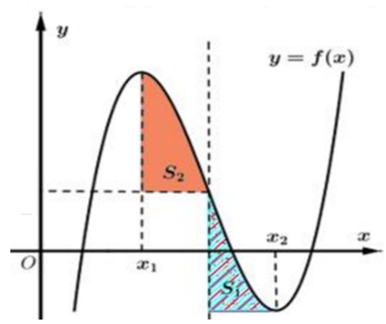
Câu 33. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+bx^2+cx+3$ thỏa mãn $\min\limits_{\left(0;2\right)} f\left(x\right)=f\left(1\right)=1$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)$ là

A. 5 **B.** 55 **C.** $3-\sqrt{2}$ **D.** 17

Câu 34. Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{e^x\left(5\cos^2 x+\cos x+\sin x\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=a.e^{\frac{\pi}{b}}+c$, với a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$?.

A. 4. **B.** 16. **C.** 10. **D.** 2.

Câu 35. Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+4$ và $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=2$. Gọi S_1,S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp\left(ABC\right);AB=2a\sqrt{2},BC=3a,\widehat{ABC}=45^0$. Gọi I là trực tâm của tam giác SBC. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $I.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 37. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)=x^3-3x^2-10x;\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị?

A. 4 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 3

Câu 38. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=2^{\frac{\left(x-1\right)^2}{2x}}$ là

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

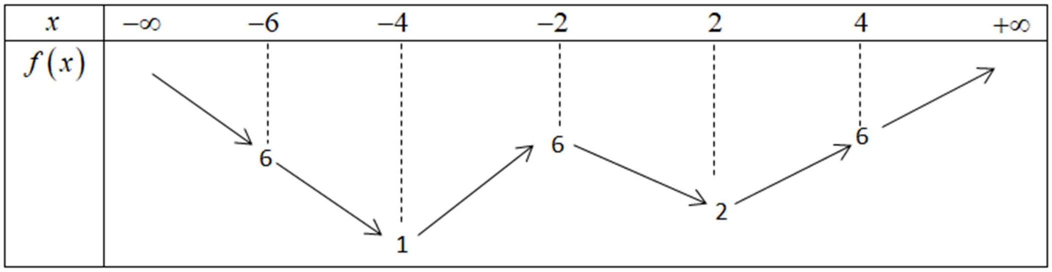
Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1$, $AD=\sqrt{10}$, $SA=SB$, $SC=SD$. Biết mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SCD\right)$ vuông góc nhau đồng thời tổng diện tích của hai tam giác ΔSAB và ΔSCD bằng 2. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 40. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left(m^2-2m\right)e^x-2mx-m^2+2m\geq 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 4 **B.** 0 **C.** 5 **D.** 2

Câu 41. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \dfrac{\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}}{f\left(\dfrac{32x}{x^2+16}\right)} - f(m) \right|$ nhỏ hơn $\dfrac{16}{3}$?

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn

$\left[f'(x)\right]^2 = 4.\left[2x^2+1-f(x)\right]$ với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$ và $f(1) = 2$. Giá trị $I = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

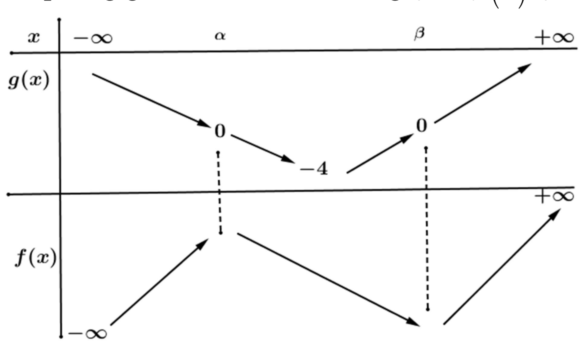
Câu 43. Cho phương trình $3^{x^2+2mx+4m-3} - 2 = \left|\dfrac{m-2}{x+m}\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-6;0]$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x) = e^{|x-2|} + \ln\left(x^2-4x+5\right)$. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ với $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f\left(x^2+y^2\right) = f(2x+4y)$?

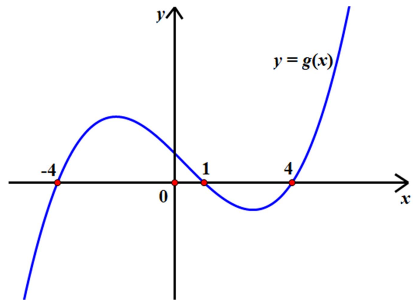
A. 11 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 12

Câu 45. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1 - 2d$ và $g(x) = cx^2 - 2x + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 30$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), x = -3, x = 6$ bằng



A. $\dfrac{1231}{12}$. **B.** $\dfrac{1321}{12}$. **C.** $\dfrac{2113}{12}$. **D.** $\dfrac{1123}{12}$.

Câu 46. Cho các hàm số $y = f(x); y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g(x) = \left(f(2-x)\right)'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;0\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$ **C.** $\left(1;2\right)$ **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

Câu 47. Cho mặt cầu $\left(S\right)$ có bán kính R không đổi, hình trụ $\left(T\right)$ bất kì nội tiếp mặt cầu $\left(S\right)$. Thể tích khối trụ $\left(T\right)$ là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Câu 48. Cho các hàm số $f\left(x\right)=\frac{4^x}{4^x+2}; g\left(x\right)=ax^5+bx^3+cx$ $\left(a>0;b>0\right)$ và $g\left(3\right)=-\frac{7}{3}; g\left(9\right)=81$. Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(g\left(1-2x\right)\right)+f\left(1-m^2+2g\left(x+4\right)\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 17 **B.** 19 **C.** 0 **D.** 15

Câu 49. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 3 điểm chia đều cạnh tương ứng thành các phần bằng nhau. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu. Lấy ra từ S một tam giác, xác suất để mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho bằng

A. $\frac{2}{45}$. **B.** $\frac{9}{34}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{15}$

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2-64x\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 19 **B.** 6 **C.** 24 **D.** 5

------------- **HẾT** -------------

Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu gì.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD VÀ ĐT BẮC NINH CỤM TRƯỜNG THPT GIA BÌNH, THUẬN THÀNH, LƯƠNG TÀI *(Đề thi gồm 7 trang)*	ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI THPT NĂM HỌC 2022 - 2023 **Môn**: *Toán - Lớp 12* Ngày thi: 8 tháng 01 năm 2023 *Thời gian: 90 phút (không kể thời gian phát đề)*

Mã đề thi 103

Họ và tên thí sinh:.. SBD:....................

Câu 1. Cho phương trình $2\cos^2 3x + \left(3-2m\right)\cos 3x + m - 2 = 0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$. là

A. 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3.

Câu 2. Quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = (x-3)\sqrt{\log_{0,5} x + 1}$, trục Ox, và đường thẳng $x = 1$ ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\int\limits_2^3 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$.

B. $\pi\int\limits_1^3 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$.

C. $\pi\int\limits_1^2 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$.

D. $\int\limits_1^2 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3,\ AC = 4, BC = 5$ và góc giữa các cạnh bên với đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $5\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{5}{3}$ **D.** $15\sqrt{3}$

Câu 4. Gọi m,n lần lượt là số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\left(x-1\right)\sqrt{x}}{x^3 - x}$. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(x-m\right)\left(3^x - 2^x\right) \le 0$ chứa không quá 8 giá trị nguyên?

A. 8 **B.** 17 **C.** 15 **D.** 16

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ 4-x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_1^3 f\left(x-1\right)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 1.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi α là góc hợp bởi đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$. Khi đó, giá trị $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 8. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a$, $AB = b$, $BC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{2\left(a+b+c\right)}{3}$.

Câu 9. Tính thể tích của một hình hộp chữ nhật biết rằng ba mặt của hình này có diện tích là $20\,\text{cm}^2, 10\,\text{cm}^2$, $8\,\text{cm}^2$.

A. $80\,\text{cm}^3$ **B.** $40\,\text{cm}^3$ **C.** $38\,\text{cm}^3$ **D.** $1600\,\text{cm}^3$

Câu 10. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

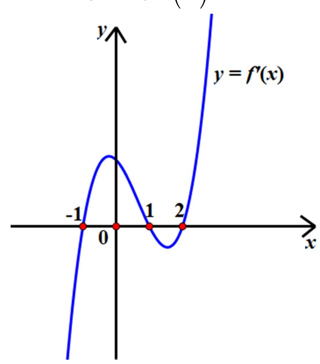
A. $1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} + C.$ **B.** $x^2 + \ln(x-1) + C.$

C. $x^2 + \ln|x-1| + C.$ **D.** $\dfrac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$

Câu 11. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = 20°$, $\widehat{BSC} = 30°$, $\widehat{CSA} = 40°$. Mặt phẳng (α) bất kì qua A cắt SB, SC tại B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\Delta AB'C'$.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x = -1;$ **B.** $x = 0$ **C.** $x = -1; x = 2$ **D.** $x = \dfrac{1}{2}; x = 1$

Câu 13. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $a_n = 10a_{n-1} - 1$, $\forall n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$

A. 103. **B.** 100. **C.** 101. **D.** 102.

Câu 14. Cho hai khối trụ có cùng thể tích; bán kính đáy và chiều cao của hai khối trụ lần lượt là R_1, h_1 và R_2, h_2. Biết rằng $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{3}{2}$. Tỉ số $\dfrac{h_1}{h_2}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ (C) và $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2 = 3$. **B.** $k_1.k_2 = 4$. **C.** $k_1.k_2 = \dfrac{1}{4}$. **D.** $k_1.k_2 = 2$.

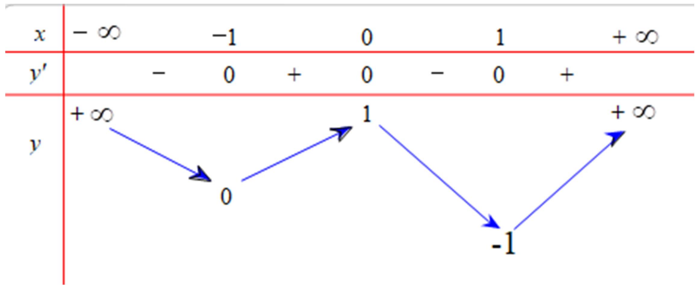
Câu 16. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x^2 - 3)$ trên $[0;2]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Câu 17. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $3+2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có bảng biến thiên như sau



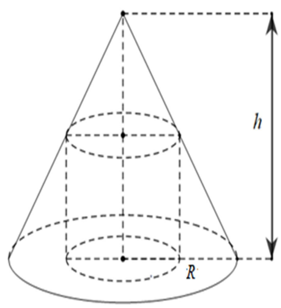
Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(|x|\right)-1\right|=1$ là

A. 4 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 6

Câu 19. Cho $a=\log_2 3; b=\log_5 2;$ và $\log_{12}\left(\dfrac{9}{125}\right)=\dfrac{m.ab-n}{p.ab+q.b}$ (m,n là các số nguyên tố). Giá trị của $m+n+p+q$ bằng

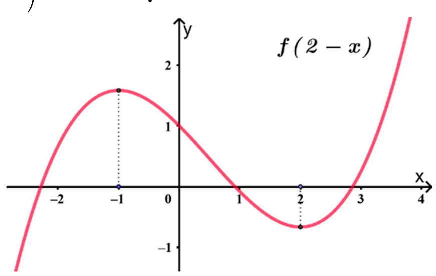
A. 6 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2

Câu 20. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



A. 4π. **B.** 10π. **C.** 6π. **D.** 8π.

Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y=f(2-x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(1;3)$

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y=x^{-3}+\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $D=(-1;1)\setminus\{0\}$ **B.** $D=(0;1)$

C. $D=(-1;1)$ **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Câu 23. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB=BC=a$, $AA'=a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.   **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.   **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.   **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0$ và mặt phẳng $(P):x-y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $2\sqrt{6}-2$.   **B.** 0.   **C.** $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}-2$.   **D.** $\sqrt{6}-2$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;\,b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(t)dt$ **B.** $\int_a^a kf(t)dt=0$

C. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ **D.** $\int_a^b f(2x)dx=2\int_{2a}^{2b} f(x)dx$

Câu 26. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK\perp SD$ tại K. Tính thể tích của khối cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K?

A. $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$.   **B.** $V=\sqrt{6}\pi a^3$.   **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.   **D.** $V=\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 27. Biến cố A liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên T có hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P(\overline{A})=\dfrac{n(\Omega\setminus A)}{n(\Omega)}$.   **B.** $P(\overline{A})=\dfrac{1}{P(A)}$.

C. $P(\overline{A})=\dfrac{n(\Omega)}{n(\overline{A})}$.   **D.** $P(\overline{A})=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Câu 28. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(x-1).\log_2(2^x-7)=0$ là

A. $1+\log_2 7$ **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 29. Cho hàm $y=f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)^m(x^3-x);\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[1;99]$ để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$?

A. 49   **B.** 50   **C.** 99   **D.** 44

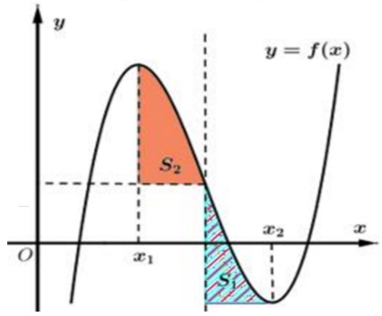
Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của điểm A' là:

A. $A'(-3;4;-1)$.   **B.** $A'(3;5;-6)$.   **C.** $A'(3;5;6)$.   **D.** $A'(4;6;-5)$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x^3-3x^2-10x;\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị?

A. 5   **B.** 2   **C.** 3   **D.** 4

Câu 32. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+4$ và $f(x_1)+f(x_2)=2$. Gọi S_1,S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC); AB = 2a\sqrt{2}, BC = 3a, \widehat{ABC} = 45^0$. Gọi I là trực tâm của tam giác SBC. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $I.ABC$ bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1;4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\frac{371}{18}$. **B.** $\frac{361}{18}$. **C.** $\frac{381}{18}$. **D.** $\frac{391}{18}$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 3$ thỏa mãn $\min_{(0;2)} f(x) = f(1) = 1$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)$ là

A. 17 **B.** 5 **C.** 55 **D.** $3 - \sqrt{2}$

Câu 36. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^x\left(5\cos^2 x + \cos x + \sin x\right)}{\cos^2 x} dx = a.e^{\frac{\pi}{b}} + c$, với a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$?.

A. 2. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 10.

Câu 37. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 2^{\frac{(x-1)^2}{2x}}$ là

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 38. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left(m^2 - 2m\right)e^x - 2mx - m^2 + 2m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 2 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 5

Câu 39. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng R. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = 1$. **B.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = \sqrt{10}$, $SA = SB$, $SC = SD$. Biết mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc nhau đồng thời tổng diện tích của hai tam giác ΔSAB và ΔSCD bằng 2. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 41. Cho phương trình $3^{x^2+2mx+4m-3}-2=\left|\dfrac{m-2}{x+m}\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-6;0\right]$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 42. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-6		-4		-2		2		4		$+\infty$
$f(x)$		↘	6	↘	1	↗	6	↘	2	↗	6	↗	

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

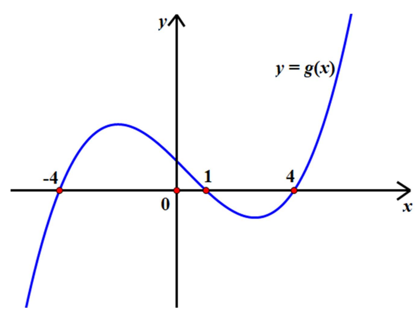
$$y=\left|\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}}{f\left(\dfrac{32x}{x^2+16}\right)}-f\left(m\right)\right| \text{ nhỏ hơn } \frac{16}{3}?$$

A. 10. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 43. Cho các hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{4^x}{4^x+2};g\left(x\right)=ax^5+bx^3+cx$ $\left(a>0;b>0\right)$ và $g\left(3\right)=-\dfrac{7}{3};g\left(9\right)=81$. Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(g\left(1-2x\right)\right)+f\left(1-m^2+2g\left(x+4\right)\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 0 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 19

Câu 44. Cho các hàm số $y=f\left(x\right);y=g\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g\left(x\right)=\left(f\left(2-x\right)\right)'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ.



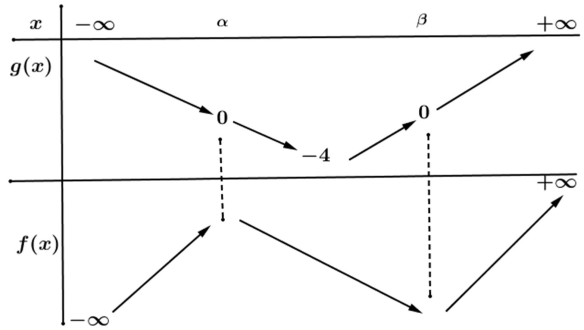
Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;2\right)$ **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(-2;0\right)$ **D.** $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$

Câu 45. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 3 điểm chia đều cạnh tương ứng thành các phần bằng nhau. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu. Lấy ra từ S một tam giác, xác suất để mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho bằng

A. $\dfrac{9}{34}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{15}$. **D.** $\dfrac{2}{45}$.

Câu 46. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3-3x^2+bx+1-2d$ và $g\left(x\right)=cx^2-2x+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=30$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right),x=-3,x=6$ bằng



A. $\dfrac{1321}{12}$. **B.** $\dfrac{1123}{12}$. **C.** $\dfrac{1231}{12}$. **D.** $\dfrac{2113}{12}$.

Câu 47. Cho mặt cầu $\left(S\right)$ có bán kính R không đổi, hình trụ $\left(T\right)$ bất kì nội tiếp mặt cầu $\left(S\right)$. Thể tích khối trụ $\left(T\right)$ là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=e^{\left|x-2\right|}+\ln\left(x^2-4x+5\right)$. Có bao nhiêu cặp số $\left(x;y\right)$ với $x\in\mathbb{Z};y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f\left(x^2+y^2\right)=f\left(2x+4y\right)$?

A. 4 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 8

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2-64x\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5 **B.** 19 **C.** 6 **D.** 24

Câu 50. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$, thỏa mãn

$\left[f'\left(x\right)\right]^2=4.\left[2x^2+1-f\left(x\right)\right]$ với mọi x thuộc đoạn $\left[0;1\right]$ và $f\left(1\right)=2$. Giá trị $I=\int\limits_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{11}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

------------- **HẾT** -------------

Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu gì.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD VÀ ĐT BẮC NINH
CỤM TRƯỜNG THPT GIA BÌNH, THUẬN THÀNH, LƯƠNG TÀI

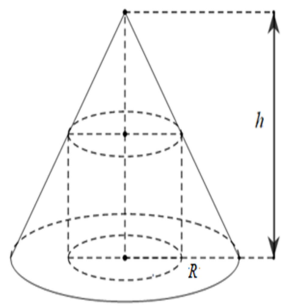
(Đề thi gồm 7 trang)

ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: *Toán - Lớp 12*
Ngày thi: 8 tháng 01 năm 2023
Thời gian: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Mã đề thi 104

Họ và tên thí sinh:.. SBD:.....................

Câu 1. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng

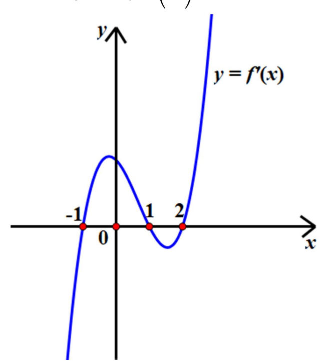


A. 6π . **B.** 8π . **C.** 4π . **D.** 10π .

Câu 2. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a$, $AB = b$, $BC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\frac{2(a+b+c)}{3}$.

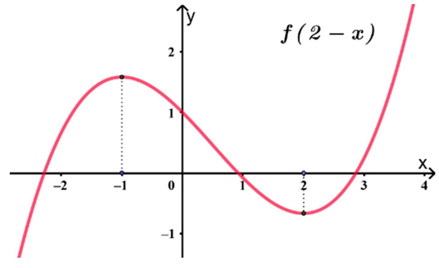
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x = 0$ **B.** $x = -1; x = 2$ **C.** $x = \frac{1}{2}; x = 1$ **D.** $x = -1;$

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y = f(2-x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(-\infty;-1)$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $2\sqrt{6}-2$. **B.** $\sqrt{6}-2$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}-2$.

Câu 6. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $1-\dfrac{1}{(x-1)^2}+C.$ **B.** $x^2+\ln(x-1)+C.$

C. $x^2+\ln|x-1|+C.$ **D.** $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C.$

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB=BC=a$, $AA'=a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$ **B.** $\int\limits_a^b f(2x)dx=2\int\limits_{2a}^{2b} f(x)dx$

C. $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(t)dt$ **D.** $\int\limits_a^a kf(t)dt=0$

Câu 9. Quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=(x-3)\sqrt{\log_{0,5}x+1}$, trục Ox, và đường thẳng $x=1$ ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\int\limits_2^3 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$. **B.** $\pi\int\limits_1^3 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$.

C. $\pi\int\limits_1^2 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$. **D.** $\int\limits_1^2 (x-3)^2(\log_{0,5}x+1)\mathrm{dx}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3, AC=4, BC=5$ và góc giữa các cạnh bên với đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{5}{3}$ **B.** $15\sqrt{3}$ **C.** $5\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

Câu 11. Cho hàm $y=f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)^m(x^3-x);\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[1;99]$ để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$?

A. 44 **B.** 49 **C.** 50 **D.** 99

Câu 12. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ bằng

A. $3+2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của điểm A' là:

A. $A'(-3;4;-1)$. **B.** $A'(3;5;-6)$. **C.** $A'(3;5;6)$. **D.** $A'(4;6;-5)$.

Câu 14. Cho phương trình $2\cos^2 3x + \left(3-2m\right)\cos 3x + m - 2 = 0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$. là

A. 4 **B.** 3. **C.** 2 **D.** 1

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi α là góc hợp bởi đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+z-1=0$. Khi đó, giá trị $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y = x^{-3} + \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $D=\left(-1;1\right)\setminus\left\{0\right\}$ **B.** $D=\left(0;1\right)$

C. $D=\left(-1;1\right)$ **D.** $D=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 4, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		0		1		-1		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(\left|x\right|\right)-1\right|=1$ là

A. 6 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK\perp SD$ tại K. Tính thể tích của khối cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K?

A. $V=\sqrt{6}\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 19. Tính thể tích của một hình hộp chữ nhật biết rằng ba mặt của hình này có diện tích là $20\,\text{cm}^2, 10\,\text{cm}^2$, $8\,\text{cm}^2$.

A. $80\,\text{cm}^3$ **B.** $40\,\text{cm}^3$ **C.** $38\,\text{cm}^3$ **D.** $1600\,\text{cm}^3$

Câu 20. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\left(x^2-3\right)$ trên $\left[0;2\right]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 0 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 21. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x-1\right).\log_2\left(2^x-7\right)=0$ là

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** $1+\log_2 7$

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ (C) và $d: y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại giao điểm của d và $\left(C\right)$. Tính $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=3$. **B.** $k_1.k_2=4$. **C.** $k_1.k_2=\dfrac{1}{4}$. **D.** $k_1.k_2=2$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } x\le 1\\ 4-x & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x-1)\,dx$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 1.

Câu 24. Gọi m,n lần lượt là số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^3-x}$. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 5

Câu 25. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1=1$ và $a_n=10a_{n-1}-1$, $\forall n\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n>100$

A. 103. **B.** 100. **C.** 101. **D.** 102.

Câu 26. Cho hai khối trụ có cùng thể tích; bán kính đáy và chiều cao của hai khối trụ lần lượt là R_1,h_1 và R_2,h_2. Biết rằng $\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{2}$. Tỉ số $\frac{h_1}{h_2}$ bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 27. Biến cố A liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên T có hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P(\overline{A})=\frac{n(\Omega)}{n(\overline{A})}$. **B.** $P(\overline{A})=\frac{n(\Omega\setminus A)}{n(\Omega)}$.

C. $P(\overline{A})=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$. **D.** $P(\overline{A})=\frac{1}{P(A)}$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tập nghiệm của bất phương trình $(x-m)(3^x-2^x)\le 0$ chứa không quá 8 giá trị nguyên?

A. 17 **B.** 16 **C.** 8 **D.** 15

Câu 29. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $\widehat{ASB}=20^\circ$, $\widehat{BSC}=30^\circ$, $\widehat{CSA}=40^\circ$. Mặt phẳng (α) bất kì qua A cắt SB, SC tại B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\Delta AB'C'$.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Câu 30. Cho $a=\log_2 3; b=\log_5 2;$ và $\log_{12}\left(\frac{9}{125}\right)=\frac{m.ab-n}{p.ab+q.b}$ (m,n là các số nguyên tố). Giá trị của $m+n+p+q$ bằng

A. 4 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 6

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x^3-3x^2-10x;\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị?

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1$, $AD=\sqrt{10}$, $SA=SB$, $SC=SD$. Biết mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc nhau đồng thời tổng diện tích của hai tam giác ΔSAB và ΔSCD bằng 2. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC); AB = 2a\sqrt{2}, BC = 3a, \widehat{ABC} = 45^0$. Gọi I là trực tâm của tam giác SBC. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $I.ABC$ bằng

A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 3$ thỏa mãn $\min\limits_{(0;2)} f(x) = f(1) = 1$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)$ là

A. 5 **B.** 55 **C.** $3 - \sqrt{2}$ **D.** 17

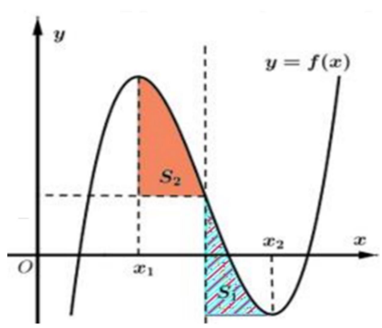
Câu 35. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) = 2^{\frac{(x-1)^2}{2x}}$ là

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4

Câu 36. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng R. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 37. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và $f(x_1) + f(x_2) = 2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1;4], f(1) = \dfrac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\dfrac{391}{18}$. **B.** $\dfrac{361}{18}$. **C.** $\dfrac{381}{18}$. **D.** $\dfrac{371}{18}$.

Câu 39. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{e^x\left(5\cos^2 x + \cos x + \sin x\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = a.e^{\frac{\pi}{b}} + c$, với a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$?.

A. 2. **B.** 16. **C.** 10. **D.** 4.

Câu 40. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $(m^2 - 2m)e^x - 2mx - m^2 + 2m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

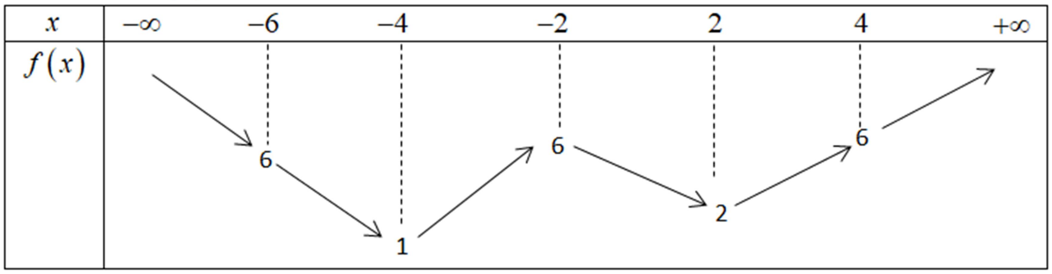
A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 0

Câu 41. Cho các hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{4^{x}}{4^{x}+2};g\left(x\right)=ax^{5}+bx^{3}+cx\ \left(a>0;b>0\right)$ và $g\left(3\right)=-\dfrac{7}{3};g\left(9\right)=81$.

Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(g\left(1-2x\right)\right)+f\left(1-m^{2}+2g\left(x+4\right)\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 15 **B.** 19 **C.** 0 **D.** 17

Câu 42. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y=\left|\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}}{f\left(\dfrac{32x}{x^{2}+16}\right)}-f\left(m\right)\right|$$ nhỏ hơn $\dfrac{16}{3}$?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 43. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$, thỏa mãn

$\left[f'\left(x\right)\right]^{2}=4.\left[2x^{2}+1-f\left(x\right)\right]$ với mọi x thuộc đoạn $\left[0;1\right]$ và $f\left(1\right)=2$. Giá trị $I=\int\limits_{0}^{1}xf\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=e^{\left|x-2\right|}+\ln\left(x^{2}-4x+5\right)$. Có bao nhiêu cặp số $\left(x;y\right)$ với $x\in\mathbb{Z};y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f\left(x^{2}+y^{2}\right)=f\left(2x+4y\right)$?

A. 4 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 8

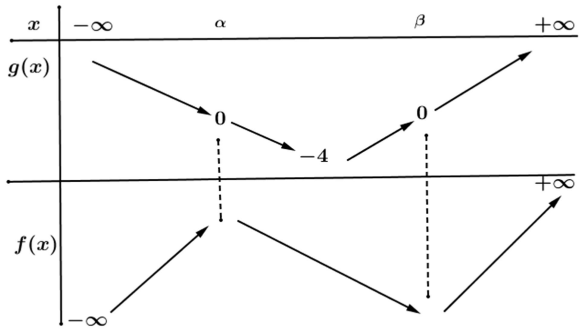
Câu 45. Cho mặt cầu $\left(S\right)$ có bán kính R không đổi, hình trụ $\left(T\right)$ bất kì nội tiếp mặt cầu $\left(S\right)$. Thể tích khối trụ $\left(T\right)$ là V_{1}; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_{2}. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_{1}}{V_{2}}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Câu 46. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 3 điểm chia đều cạnh tương ứng thành các phần bằng nhau. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu. Lấy ra từ S một tam giác, xác suất để mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho bằng

A. $\dfrac{4}{15}$ **B.** $\dfrac{9}{34}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{45}$.

Câu 47. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^{3}-3x^{2}+bx+1-2d$ và $g\left(x\right)=cx^{2}-2x+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_{1},x_{2},x_{3} thỏa mãn $x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+x_{3}^{2}=30$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right),x=-3,x=6$ bằng



A. $\dfrac{2113}{12}$. **B.** $\dfrac{1123}{12}$. **C.** $\dfrac{1231}{12}$. **D.** $\dfrac{1321}{12}$.

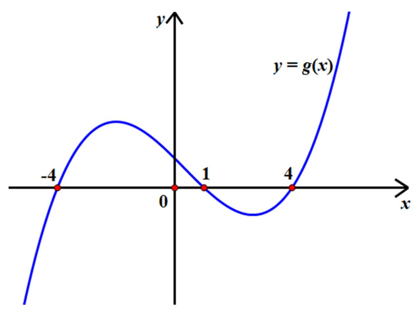
Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2-64x\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 19 **B.** 6 **C.** 24 **D.** 5

Câu 49. Cho phương trình $3^{x^2+2mx+4m-3}-2=\left|\dfrac{m-2}{x+m}\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-6;0\right]$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 50. Cho các hàm số $y=f\left(x\right);y=g\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g\left(x\right)=\left(f\left(2-x\right)\right)'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;2\right)$ **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(-2;0\right)$ **D.** $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$

------------- **HẾT** -------------

Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu gì.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN CÁC MÃ ĐỀ

Mã đề [101]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	B	B	D	A	D	A	A	A	C	D	A	D	B	A	C	D	D	B	A	C	B	B	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	C	C	C	B	C	A	D	D	B	C	B	A	A	A	C	D	B	B	B	A	C	A	C	C

Mã đề [102]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	B	C	A	B	D	A	C	A	C	B	D	A	B	B	C	D	B	B	D	D	A	B	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	D	A	C	B	D	B	A	A	A	D	C	D	D	A	C	B	A	A	B	C	C	A	D	B

Mã đề [103]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	A	D	C	A	B	C	B	D	A	B	D	D	B	B	B	D	C	D	C	A	B	D	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	A	B	A	B	B	A	C	D	B	B	D	B	C	D	A	D	C	A	C	A	A	C	C	C

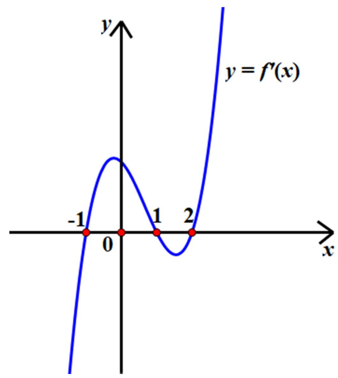
Mã đề [104]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	A	B	B	D	D	B	C	C	B	D	B	C	C	A	A	C	B	C	A	B	A	A	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	B	D	B	B	D	D	C	A	B	D	A	A	D	C	D	A	D	C	C	A	D	B	C	A

CÂU HỎI ĐỀ HSG CỤM 12 NĂM 2022

Mức 2

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-2x\right)$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=0$ B. $x=-1;x=2$ C. $x=\dfrac{1}{2};x=1$ D. $x=-1;$

Câu 2: Cho hàm $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)=x^2\left(x-1\right)^m\left(x^3-x\right);\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left[1;99\right]$ để hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-2\right)$?

A. 49 B. 50 C. 99 D. 44

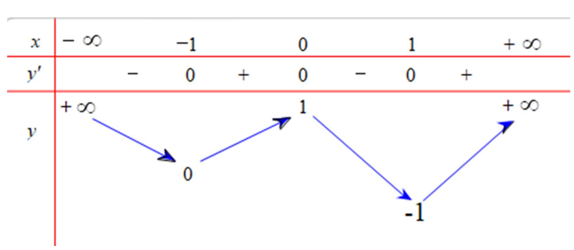
Câu 3: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\left(x^2-3\right)$ trên $\left[0;2\right]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 4 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 4: Gọi m,n lần lượt là số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x-1\right)\sqrt{x}}{x^3-x}$. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 2 B. 4 C. 3 D. 5

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 4, có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(|x|\right)-1\right|=1$ là

A. 6 B. 5 C. 3 D. 4

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y=x^{-3}+\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $D=(-1;1)\setminus\{0\}$ B. $D=(0;1)$ C. $D=(-1;1)$ D. $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Câu 7: Cho $a=\log_2 3; b=\log_5 2;$ và $\log_{12}\left(\frac{9}{125}\right)=\frac{m.ab-n}{p.ab+q.b}$ (m,n là các số nguyên tố). Giá trị của $m+n+p+q$ bằng

A. 8 B. 2 C. 6 D. 4

Câu 8: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ bằng

A. $3+2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt[3]{6}}{2}$. **D.** $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(x-1).\log_2\left(2^x-7\right)=0$ là

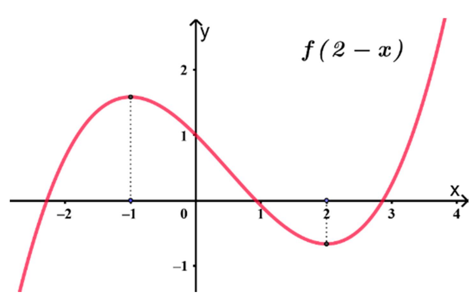
A. 3 B. 4 C. 5 D. $1+\log_2 7$

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tập nghiệm của bất phương trình $(x-m)\left(3^x-2^x\right)\le 0$ chứa không quá 8 giá trị nguyên?

A. 15 B. 16 C. 8 D. 17

Mức 3

Câu 1; Cho đồ thị hàm số $y=f(2-x)$ có đồ thị như hình vẽ



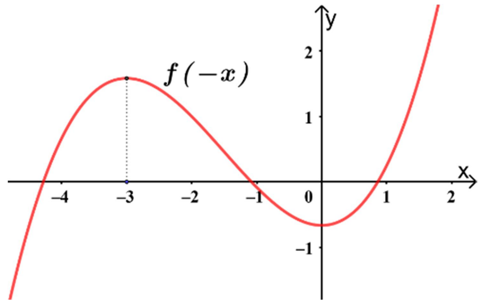
Hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ B. $(1;3)$ C. $(-\infty;-1)$ D. $(-1;0)$

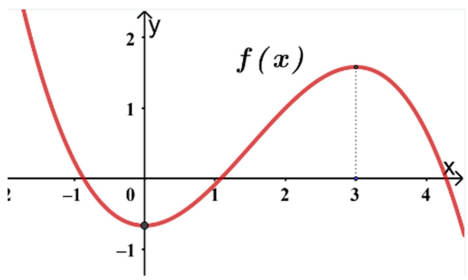
Hướng dẫn

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=g(x)=f(2-x)$.

Tịnh tiến (C) sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=g(x+2)=f(-x)$.



Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f(-x)$ qua Oy ta được đồ thị hàm số $y=f(x)$.



Ta có $y=f(x^2-3)\Rightarrow y'=2x.f'(x^2-3)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^2-3)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-3=0\\ x^2-3=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{3}\\ x=\pm\sqrt{6}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

<u>Câu 2:</u> Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x^3-3x^2-10x;\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị?

<u>A</u>. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Hướng dẫn

$+\ f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2-10x=0\Leftrightarrow x=0;x=5;x=-2$

+ đặt $u(x)=x^2-2mx+m-2$. Ta có $g'(x)=\left(f\left(|u(x)|-3\right)\right)'=\dfrac{u(x).u'(x)}{|u(x)|}.f'\left(|u(x)|-3\right)$

$$f'\left(\left|u(x)\right|-3\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|u(x)\right|-3=0\\ \left|u(x)\right|-3=-2\\ \left|u(x)\right|-3=5\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u(x)=\pm 3\\ u(x)=\pm 1\,(1)\\ u(x)=\pm 8\end{array}\right.;\,u(x).u'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u(x)=0\\ u'(x)=0\end{array}\right.$$

+Do vậy số điểm cực trị của hàm $g\left(x\right)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ bằng số nghiệm bội lẻ của $u(x)=\left\{0;\pm 1;\pm 3;\pm 8\right\}$ +số điểm cực trị của $u(x)$

Ta có bảng biến thiên của hàm $u(x)$:

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$ ↘	$-m^2+m-2$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $ycbt\Leftrightarrow -8\le -m^2+m-2<-3\Leftrightarrow \begin{cases}-m^2+m+6\ge 0\\ -m^2+m+1<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\in\left[-2;3\right]\\ \left[\begin{array}{l}m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}$

$$\Leftrightarrow m\in\left[-2;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};3\right];m\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow m\in\left\{2;3\right\}$$

<u>Câu 3:</u> Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+bx^2+cx+3$ thỏa mãn $\min\limits_{(0;2)}f\left(x\right)=f\left(1\right)=1$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)$ là

<u>A</u>. 5 **B.** 55 **C.** $3-\sqrt{2}$ **D.** 17

Hướng dẫn:

+ $\min\limits_{(0;2)}f\left(x\right)=f\left(1\right)=1$ nên suy ra hàm đạt cực tiểu tại x=1

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(1)=0\\ f(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+2b+c=0\\ b+c+4=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3-3x+3$$

Dễ dàng lập được bảng biến thiên của $f(x)=x^3-3x+3$

+ Xét hàm $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)$;

Nhận xét: $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\sqrt{2}\le t\le 2\Rightarrow \min t=\sqrt{2},khi\ x=\pm 1;\max t=2,khi\ x=0$

Dựa vào bbt của f(x), suy ra $\max g(x)=f(2)=5$

Câu 4: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=2^{\frac{(x-1)^2}{2x}}$ là

A. 5 B. 3 C. 4 D.1

Hướng dẫn:

Điều kiện: x>0

Đặt $t=\frac{x^2+1}{x}$, phương trình có dạng $\log_2 t=2^{\frac{1}{2}t-1}\Leftrightarrow \log_2 t-2^{\frac{1}{2}t-1}=0$

Xét $f(t)=\log_2 t-2^{\frac{1}{2}t-1}\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t.\ln 2}-\frac{1}{2}.2^{\frac{1}{2}t-1}.\ln 2\Rightarrow f''(t)=-\frac{1}{t^2.\ln 2}-\frac{1}{4}.2^{\frac{1}{2}t-1}.(\ln 2)^2<0;\forall t>0$

Suy ra f'(t) có không quá 1 nghiệm, suy ra f(t) có không quá 2 nghiệm.

Nhận xét $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2+1}{x}=2\\\frac{x^2+1}{x}=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=0\\x^2-4x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$. Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 5.

Câu 5: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $(m^2-2m)e^x-2mx-m^2+2m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 4 B. 0 C. 5 D. 2

Hướng dẫn:

+ Đặt $f(x)=(m^2-2m)e^x-2mx-m^2+2m$, nhận xét $f(0)=0$ nên yêu cầu tương đương $f(x)\ge f(0);\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra x=0 là điểm cực tiểu của hàm số $\Rightarrow f'(0)=0$

+ $f'(x)=(m^2-2m)e^x-2m\Rightarrow f'(0)=m^2-4m=0\Leftrightarrow m=0,m=4$

+ Với $m=0\Rightarrow f(x)=0;\forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn)

+ Với $m=4\Rightarrow f(x)=8e^x-8x-8=8\left(e^x-(x+1)\right)\ge 0;\forall x\in\mathbb{R}$ (do đường thẳng y=x+1 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=e^x$ tại x=0) hoặc có thể vẽ bbt của f(x) để suy ra $f(x)\ge 0;\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra m=4 thỏa mãn

Vậy m=0 hoặc m=4.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn

$x+2xf(x)=[f'(x)]^2,\forall x\in[1;4],f(1)=\frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\dfrac{391}{18}$.   **B.** $\dfrac{361}{18}$.   **C.** $\dfrac{381}{18}$.   **D.** $\dfrac{371}{18}$.

Hướng dẫn:

Ta có: $x+2xf(x)=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1+2f(x))=[f'(x)]^2$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1+2f(x)}=x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x} \Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4 \sqrt{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\frac{14}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(4)}-2=\frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4)=\frac{391}{18}$$

Câu 7: Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{e}^x\left(5\cos^2 x+\cos x+\sin x\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{b}}+c$, với a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

A. 4.   **B.** 16.   **C.** 10.   **D.** 2.

Lời giải

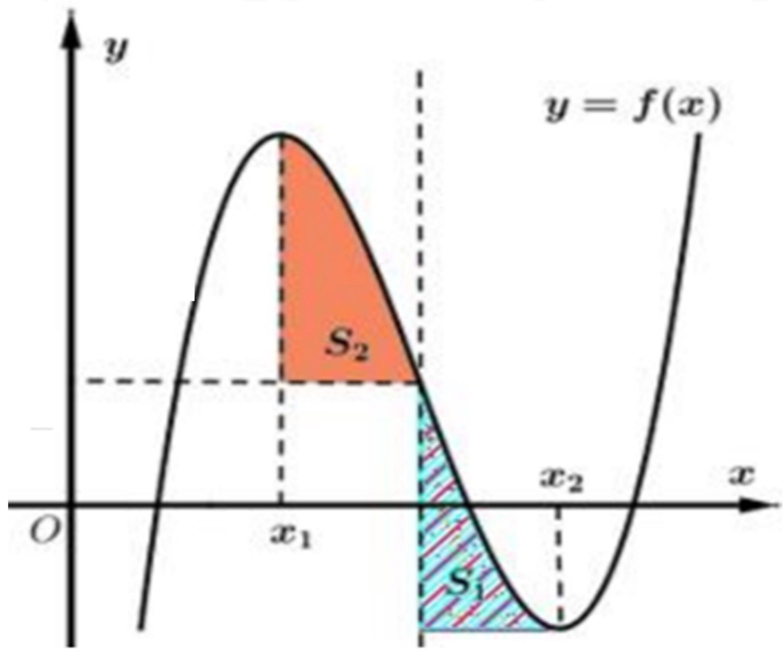
Chọn A

$$I=5\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{e}^x.\frac{\cos x+\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x =5\mathrm{e}^x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{e}^x.\cos x+\mathrm{e}^x.\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=5\mathrm{e}^x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)'.\cos x-\mathrm{e}^x.\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=5\mathrm{e}^x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x}\right)'\mathrm{d}x=5\mathrm{e}^x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=7\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}-6.$$

Do đó $a=7$, $b=3$, $c=-6$. Vậy $P=a+b+c=4$.

Câu 8: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+4$ và $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=2$. Gọi S_1,S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\frac{8}{5}$.   **<u>B</u>.** $\frac{3}{5}$.   **C.** $\frac{3}{8}$.   **D.** $\frac{5}{3}$.

.

Lời giải

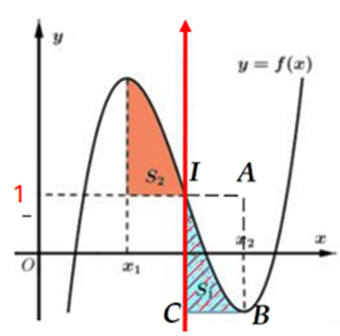
Không mất tính tổng quát, tịnh tiến đồ thị hàm bậc ba $y = f(x)$ sao cho điểm uốn của đồ thị thuộc trục tung $\Rightarrow x_1 + x_2 = 0$. Lại có $x_2 = x_1 + 4$ nên $x_1 = -2, x_2 = 2$.

Theo giả thiết, ta có $f'(x) = k(x-2)(x+2) = k(x^2-4)$ với $k > 0$.

Suy ra $f(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right) + C$.

Do $f(-2) + f(2) = 2 \Leftrightarrow \frac{16k}{3} + C - \frac{16k}{3} + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$

Suy ra $f(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right) + 1$ và $f(x_2) = f(2) = -\frac{16k}{3} + 1$.



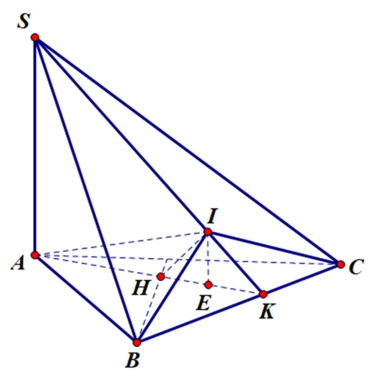
Ta có $S_2=\int\limits_{-2}^{0}\left[f\left(x\right)-1\right]dx=\int\limits_{-2}^{0}k\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)dx=\frac{20k}{3}$.

Xét $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{IABC}-S_2}{S_2}=\frac{BC.IC}{S_2}-1=\frac{2.\left|1-f\left(2\right)\right|}{S_2}-1=\frac{\frac{32k}{3}}{\frac{20k}{3}}-1=\frac{3}{5}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp\left(ABC\right);AB=2a\sqrt{2},BC=3a,\widehat{ABC}=45^0$. Gọi I là trực tâm của tam giác SBC. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $I.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn



+ Gọi H là trực tâm của tam giác , $K=AH\cap BC$, ta chứng minh được $HI\perp\left(SBC\right)$, suy ra trong mặt phẳng $\left(SAK\right)$ có $\widehat{KIH}=90^0\Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính HK.

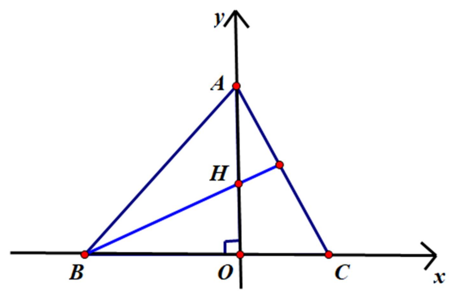
+ Gọi E là hình chiếu vuông góc của I lên $AK\Rightarrow IE\perp ABC\Rightarrow V_{I.ABC}=\frac{1}{3}IE.S_{ABC}$

+ $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.BC.\sin 45^0=\frac{1}{2}3a.2a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=3a^2\Rightarrow V_{I.ABC}=IE.a^2$, suy ra thể tích $I.ABC$ lớn nhất khi và chỉ khi IE lớn nhất. Do I thuộc nửa đường tròn đường kính HK nên $IE\le\frac{HK}{2}$, suy ra IE lớn nhất bằng $\frac{HK}{2}$ khi I là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{HK}$.

+ Chọn hệ trục như hình vẽ với tam giác ABC, ta có

$AB=2a\sqrt{2};\widehat{ABC}=45^0\Rightarrow AO=BO=2a\Rightarrow OC=a$

$A\left(0;2a\right);B\left(-2a;0\right);C\left(a;0\right):H\left(0;x\right)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\left(a;-2a\right);\overrightarrow{BH}=\left(2a;x\right)$.

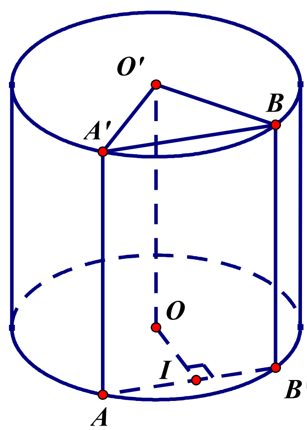


Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=0 \Leftrightarrow 2a^2-2a.x=0 \Leftrightarrow x=a \Rightarrow HK=a \Rightarrow IE_{\max}=\frac{a}{2} \Rightarrow \max V_{I.ABC}=\frac{a}{2}a^2=\frac{a^3}{2}$

<u>Câu 10:</u> Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng R. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}$. **<u>B.</u>** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. **D.** $\tan\alpha=1$.

Lời giải



+ Gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'.

+ Gọi B' là hình chiếu của B lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O.

+ Gọi R là bán kính của đường tròn tâm O, Ta có: $\alpha=\widehat{BAB'}$.

Suy ra: $AB'=\frac{R}{\tan\alpha}$. Gọi I là trung điểm của $AB' \Rightarrow OI \perp AB'$.

+ Ta có: $OI=\sqrt{OB'^2-IB'^2}=\frac{R}{2}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}$.

Và: $S_{\Delta OAB'}=\frac{1}{2}OI.AB'=\frac{R^2}{4\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}$.

Suy ra: $V_{OO'AB} = \frac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B} = \frac{1}{3}OO'.S_{\Delta OAB'} = \frac{R^3}{36}.\frac{1}{\tan\alpha}.\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}$.

+ Ta có: $V_{OO'AB}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{\tan\alpha}.\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(t) = t.\sqrt{4-t^2}$ với $t \in (0;2)$

Qua bảng biến thiên, ta có $V_{\max}$ khi $t=\sqrt{2}$ hay $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 2: $V_{OO'AB} = \frac{1}{6}OA.OA'.d(OA,OA').\sin(OA.OA') = \frac{R^3}{6}\sin(OA.OA')$

Vậy thể tích max khi $(OA.OA') = 90^0 \Rightarrow AB' = R\sqrt{2} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{AA'}{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Mức 4

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = e^{|x-2|} + \ln(x^2-4x+5)$. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ với $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(x^2+y^2) = f(2x+4y)$?

A. 12 B. 11 C. 8 D. 4

Hướng dẫn:

Ta nhận thấy:

+ $y = f(x) = e^{|x-2|} + \ln(x^2-4x+5) = e^{|x-2|} + \ln((x-2)^2+1)$ nên hàm số có đồ thị đối xứng nhau qua đường thẳng $x=2$.

+ $y' = \frac{x-2}{|x-2|}e^{|x-2|} + \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$ nên hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;2)$

Từ đó suy ra $f(m) = f(n) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=n \\ \frac{m+n}{2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=n \\ m+n=4 \end{array}\right.$

Suy ra $f(x^2+y^2) = f(2x+4y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-2x-4y=0(1) \\ x^2+y^2+2x+4y-4=0(2) \end{array}\right.$

+ (1) $x^2+y^2-2x-4y=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=5 \Rightarrow |x-1| \le \sqrt{5} \Rightarrow x \in \{-1;0;1;2;3\}$

Với $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow y=1 \vee y=3$; Với $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow y=0 \vee y=4$; Với $x=0 \Rightarrow (y-2)^2=5(l)$

+(2) $x^2+y^2+2x+4y-4=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=9 \Rightarrow |x+1| \le 3 \Rightarrow x \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$

Với $\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow y=-2$; Với $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow (y+2)^2=5(l)$; Với $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right. \Rightarrow (y+2)^2=8(l)$

Với $x=-1 \Rightarrow y=1; y=-5$

Vậy có 11 cặp thỏa mãn

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2-64x\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 19   B. 6   C. 24   D. 5

Hướng dẫn

+ xét $f(x)=x^4-mx^2-64x=x\left(x^3-mx-64\right)$

$f'(x)=4.x^3-2mx-64; f'(x)=0 \Leftrightarrow m=2x^2-\dfrac{32}{x}=g(x)$; $g'(x)=4x+\dfrac{32}{x^2}; g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

TH1: Nếu $m \le 24$ thì $f'(x)=0$ có 1 nghiệm bội lẻ, suy ra f(x) có một điểm cực trị dương , suy ra f(x) có tối đa 2 nghiệm nên $y=|f(x)|$ có tối đa 3 điểm cực trị (loại)

TH2: Nếu $m>24$, khi đó f'(x) có 3 nghiệm bội lẻ, suy ra f(x) có 3 điểm cực trị.

Khi đó, để $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow x^3-mx-64=0$ có đúng 1 nghiệm bội lẻ khác 0

$x^3-mx-64=0 \Leftrightarrow m=x^2-\dfrac{64}{x}=h(x)$

Ta có bbt

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{32}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	

$h(x)$	$+\infty$ ↘	30,2	↗ $+\infty$	$-\infty$	↗ $+\infty$

Suy ra, $m \le 30$. Vậy $25 \le m \le 30$, có 6 giá trị nguyên của m

Câu 3: Cho các hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{4^x}{4^x+2}; g\left(x\right)=ax^5+bx^3+cx \ \left(a>0;b>0\right)$ và $g\left(3\right)=-\dfrac{7}{3}; g\left(9\right)=81$. Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(g\left(1-2x\right)\right)+f\left(1-m^2+2g\left(x+4\right)\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 17 B. 19 C. 0 D. 15

Hướng dẫn

Nhận xét, f(x) đồng biến trên R và thỏa mãn $f(x)+f(1-x)=1 \Leftrightarrow 1-f(x)=f(1-x)$

Pt$\Leftrightarrow f(g(1-2x))=1-f(1-m^2+2g(x+4)) \Leftrightarrow f(g(1-2x))=f(m^2-2g(x+4)) \Leftrightarrow g\left(1-2x\right)+2g\left(x+4\right)=m^2$

Đặt $h(x)=g\left(1-2x\right)+2g(x+4) \Rightarrow h'(x)=-2.g'\left(1-2x\right)+2g'(x+4)$

Do g'(x) là hàm bậc 4 trùng phương có 1 điểm cực trị nên đồ thị hàm số đối xứng nhau qua Oy và đồng biến khi x>0. Suy ra $h'(x)=0 \Leftrightarrow g'\left(1-2x\right)=g'(x+4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x=x+4\\1-2x=-x-4\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1; x=5$

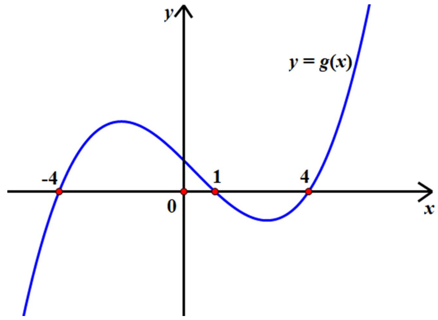
$h(-1)=g(3)+2.g(3)=3g(3)=-7; h(5)=g(-9)+2g(9)=g(9)=81$ (do hàm g(x) là hàm lẻ nên g(-9)=-g(9))

Ta có bbt

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$		-	
$h(x)$	$+\infty$	↘	-7	↗	81	↘	$-\infty$

Dựa vào bbt, để phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -7<m^2<81 \Leftrightarrow m\in\left\{-8;-7;....;8\right\}$. Có 17 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 4: Cho các hàm số $y=f\left(x\right); y=g\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g\left(x\right)=\left(f\left(2-x\right)\right)'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$ B. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ C. $(-2;0)$ D. $\left(\frac{1}{3};1\right)$

Hướng dẫn

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3 nên có dạng:

$g(x)=\left(f(2-x)\right)'=a(x+4)(x-1)(x-4), a>0 \Rightarrow f'(2-x)=-a(x+4)(x-1)(x-4)$

Đặt $t=2-x \Rightarrow f'(t)=a(t-6)(t+2)(t-1)$

Đạo hàm của hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2021$ là

$$y'=2xf'\left(x^2+2\right)-3x^2+4x-1=2ax\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)+\left[-3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$2xf'\left(x^2+2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x^2+4x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-6		-4		-2		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	6	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\nearrow$	

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}}{f\left(\dfrac{32x}{x^2+16}\right)}-f(m)\right|$ nhỏ hơn $\dfrac{16}{3}$?

A. 11. **B.** 9. **<u>C</u>.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $\left|\dfrac{32x}{x^2+16}\right|\le\dfrac{32|x|}{8|x|}=4\Rightarrow\dfrac{32x}{x^2+16}\in[-4;4]\Rightarrow 1\le f\left(\dfrac{32x}{x^2+16}\right)\le 6$.

Dấu = xảy ra tương ứng khi x=-4 và x=4

+ $\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}\right)^2=16+2\sqrt{64-(x+4)^2}\Rightarrow 4\le\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}\le\sqrt{32}$

Dấu bằng xảy ra tương ứng khi x=4 và x=-4

Vậy suy ra $\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{6}\le\dfrac{\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}}{f\left(\dfrac{32x}{x^2+16}\right)}\le\dfrac{\sqrt{32}}{1}=\sqrt{32}$.

Dấu bằng xảy ra tương ứng khi x=4 và x=-4.

Từ đó ta có: $\max\left|\dfrac{\sqrt{4-x}+\sqrt{12+x}}{f\left(\dfrac{32x}{x^2+16}\right)}-f(m)\right|=\max\left\{\left|\dfrac{2}{3}-f(m)\right|;\left|\sqrt{32}-f(m)\right|\right\}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \left|f(m)-\dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{16}{3} \\ \left|f(m)-\sqrt{32}\right| < \dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-16}{3}+\sqrt{32} < f(m) < 6$.

Dựa và bảng biến thiên của hàm số f(x) ta có $m \in \{-5;-4;-3;-1;0;1;2;3\}$.

CÁC CÂU HỎI THI CỤM

Câu 1. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $1-\dfrac{1}{(x-1)^2}+C.$ **B.** $x^2+\ln(x-1)+C.$ **C.** $x^2+\ln|x-1|+C.$ **D.** $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C.$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{khi } x\le 1 \\ 4-x & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

$$\int_1^3 f(x-1)\,\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x-1)\,\mathrm{d}(x-1)=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 3t^2\mathrm{d}t+\int_1^2 (4-t)\mathrm{d}t=3.\frac{t^3}{3}\Big|_0^1+4t\Big|_1^2-\frac{t^2}{2}\Big|_1^2=1+4-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ **B.** $\int_a^b f(2x)dx=2\int_{2a}^{2b} f(x)dx$

C. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(t)dt$ **D.** $\int_a^a kf(t)dt=0$

Câu 4. Quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=(x-3)\sqrt{\log_{0,5}x+1}$, trục Ox, và đường thẳng $x=1$ ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\int_{2}^{3}(x-3)^2(\log_{0,5}x+1)dx$.
B. $\pi\int_{1}^{3}(x-3)^2(\log_{0,5}x+1)dx$.

C. $\pi\int_{1}^{2}(x-3)^2(\log_{0,5}x+1)dx$.
D. $\int_{1}^{2}(x-3)^2(\log_{0,5}x+1)dx$.

Câu 5. Tính thể tích của một hình hộp chữ nhật biết rằng ba mặt của hình này có diện tích là $20\,cm^2$, $10\,cm^2$, $8\,cm^2$.

A. $40\,cm^3$ **B.** $38\,cm^3$ **C.** $1600\,cm^3$ **D.** $80\,cm^3$

Lời giải

Giả sử hình chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Ta có $\begin{cases} a.b=20 \\ a.c=10 \\ b.c=8 \end{cases} \Rightarrow a^2.b^2.c^2=1600 \Rightarrow a.b.c=40$.

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật là $40\,cm^3$.

Câu 6. Cho hai khối trụ có cùng thể tích; bán kính đáy và chiều cao của hai khối trụ lần lượt là R_1,h_1 và R_2,h_2. Biết rằng $\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{2}$. Tỉ số $\frac{h_1}{h_2}$ bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của khối trụ thứ nhất và thứ hai.

Ta có: $V_1=V_2 \Leftrightarrow \pi R_1^2h_1=\pi R_2^2h_2 \Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2}=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2=\frac{4}{9}$.

Câu 7. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA=a$, $AB=b$, $BC=c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

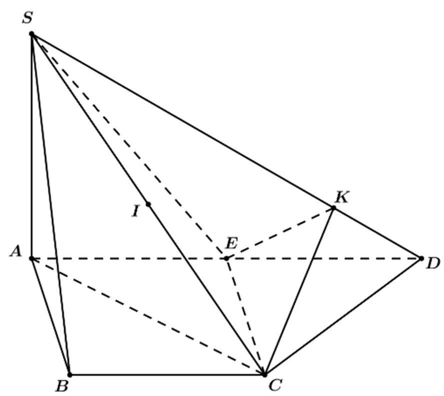
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3, AC=4, BC=5$ và góc giữa các cạnh bên với đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $5\sqrt{3}$ **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $15\sqrt{3}$

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK \perp SD$ tại K. Tính thể tích của khối cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K?

A. $V = \frac{\pi a^3}{6}$. **B.** $V = \sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Vì E là trung điểm AD nên $ABCE$ là hình vuông cạnh a, nên $CE \perp AD$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CE \perp SA$.

Từ đó chứng minh được $SK \perp KC$.

Dễ thấy có $\widehat{SEC} = \widehat{SKC} = \widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90°$. Suy ra A, B, E, K luôn nhìn SC dưới 1 góc vuông nên S, A, B, C, E, K nằm trên mặt cầu đường kính SC.

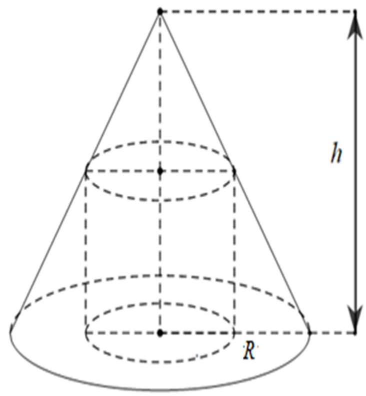
Gọi I là trung điểm SC thì mặt cầu đi qua qua sáu điểm S, A, B, C, E, K có bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

Ta có $ABCE$ là hình vuông cạnh a, nên $AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông cân tại A, cạnh $AC = SA = a\sqrt{2}$ nên $SC = 2a$, suy ra $R = \frac{SC}{2} = a$.

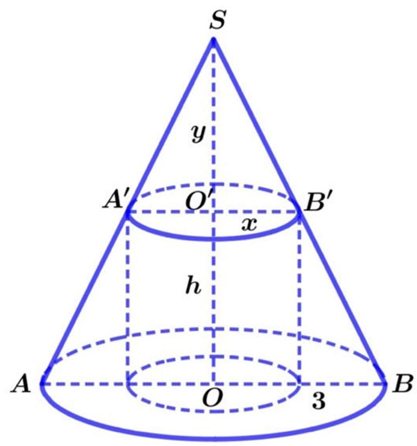
Vậy thể tích mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K là: $V = \frac{4\pi a^3}{3}$

Câu 10. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



A. 10π . **B.** 6π . **<u>C</u>.** 8π . **D.** 4π .

Lời giải



Đặt $OO'=l$, $B'O'=x$, $SO=h=6$ và $SO'=y$.

Áp dụng định lý Talet vào tam giác SOB ta được $\dfrac{O'B'}{OB}=\dfrac{SO'}{SO}\Leftrightarrow\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{6}\Leftrightarrow y=2x$.

Ta có $l=6-y=6-2x$. Suy ra $V=\pi.x^2.(6-2x)=\pi.x.x.(6-2x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số x, x và $6-2x$ ta được

$$V=\pi.x.x.(6-2x)\le\pi\left(\frac{x+x+6-2x}{3}\right)^3=8\pi.$$

Vậy $V_{\max}=8\pi$ khi $x=2$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của điểm A' là:

A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(-3;4;-1)$. **<u>C.</u>** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;5;6)$.

Lời giải

Gọi $A'(a;b;c)$

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp $\Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = (2;5;-7)$

$\overrightarrow{AA'} = (a-1;b;c-1) \rightarrow \begin{cases} a-1=2 \\ b=5 \\ c-1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases}$ Vậy: $A'(3;5;-6)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{6}-2$. **B.** 0. **C.** $\frac{4\sqrt{6}}{3}-2$. **D.** $2\sqrt{6}-2$.

Giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;2)$ và bán kính $R=2$.

$d(I,(P))=\sqrt{6}>R$ suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Điểm $M\in(S)$ thỏa mãn $d(M,(P))$ nhỏ nhất bằng $d(I,(P))-R=\sqrt{6}-2$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi α là góc hợp bởi đường thẳng $d: \frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+z-1=0$. Khi đó, giá trị $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Giải

d có VTCP là $\vec{u}=(1;2;-1)$ và (P) có VTPT là $\vec{n}=(2;1;1)$.

Vì α là góc không tù nên từ $\sin\alpha=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\frac{|1.2+2.1-1.1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14. Biến cố A liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên T có hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

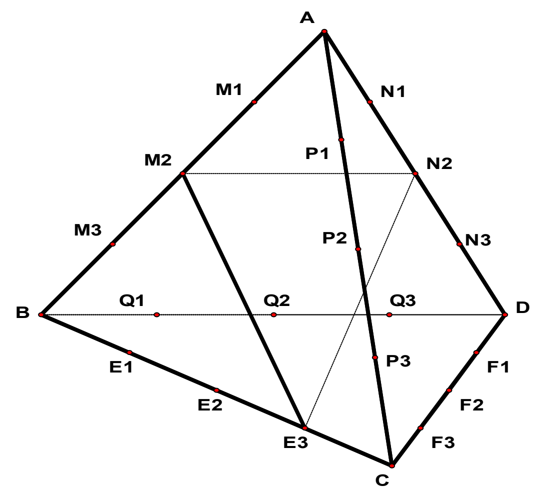
A. $P(\overline{A})=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$. **B.** $P(\overline{A})=\frac{1}{P(A)}$. **C.** $P(\overline{A})=\frac{n(\Omega)}{n(\overline{A})}$. **D.** $P(\overline{A})=\frac{n(\Omega\setminus A)}{n(\Omega)}$.

Câu 15. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 3 điểm chia đều cạnh tương ứng thành các phần bằng nhau. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu. Lấy ra từ S một tam giác, xác suất để mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho bằng

A. $\frac{2}{45}$. **B.** $\frac{9}{34}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{15}$

Lời giải

Cách 1:



Gọi các điểm được đánh dấu để chia đều các cạnh của tứ diện đều $ABCD$ như hình vẽ.

+ Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu.

Số phần tử của S là số cách chọn ra 3 điểm không thẳng hàng trong số 18 điểm đã cho.

Chọn ra 3 điểm trong 18 điểm trên: có C_{18}^{3} cách.

Chọn ra 3 điểm thẳng hàng trong 18 điểm trên có $6.C_3^3 = 6$ cách.

Suy ra số tam giác thỏa mãn là $C_{18}^{3} - 6 = 810$

+ Gọi T là tập hợp các tam giác lấy từ S sao cho mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện $ABCD$.

- Chọn 1 cạnh của tứ diện để mặt phẳng chứa tam giác chỉ song song với đúng cạnh đó: có $C_6^1 = 6$ cách.

Xét các tam giác mà mặt phẳng chứa nó chỉ song song với cạnh BD, suy ra tam giác đó phải có một cạnh song song với BD.

- Có 6 cách chọn cạnh song song với BD là $M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3$.

- Giả sử ta chọn cạnh M_2N_2 là cạnh của tam giác. Cần chọn đỉnh thứ 3 của tam giác trong 16 điểm còn lại.

Do $M_2N_2 \subset (ABD)$ mà mặt phẳng chứa tam giác song song với BD nên đỉnh thứ 3 không thể là 7 điểm còn lại nằm trong $mp(ABD)$.

Do mặt phẳng chứa tam giác chỉ song song với BD nên đỉnh thứ 3 không được trùng với một trong ba điểm E_2, F_2, P_2. Vậy đỉnh thứ 3 chỉ được chọn trong $16-7-3=6$ điểm còn lại.

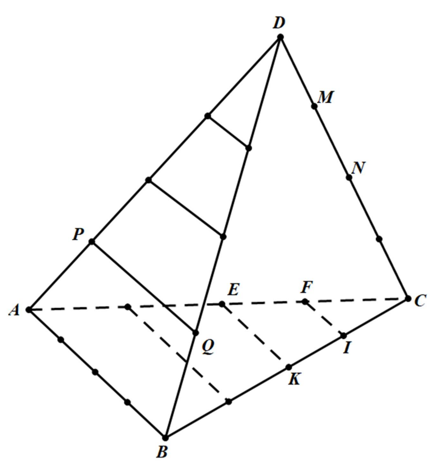
Suy ra có 6 tam giác có 1 cạnh là M_2N_2 và mặt phẳng chứa nó chỉ song song với BD.

Vậy số tam giác mà mặt phẳng chứa nó chỉ song song với cạnh BD là: $6.6=36$.

Tương tự cho các trường hợp khác, ta có số tam giác mà mặt phẳng chứa nó chỉ song song với đúng một cạnh của tứ diện $ABCD$ là: $36.6=216$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{n(T)}{n(S)}=\dfrac{216}{810}=\dfrac{4}{15}$.

<u>Cách 2</u>



+) Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu.

Chọn ra 3 điểm trong 18 điểm trên: có C_{18}^3 cách.

Trong số C_{18}^3 đó, có 6 cách chọn ra 3 điểm thẳng hàng trên các cạnh.

Suy ra $n(S)=C_{18}^3-6=810$

+) Xét phép thử: "Lấy ngẫu nhiên một phần thử thuộc S". Ta có $n(\Omega)=810$.

+) Gọi T là biến cố: "Mặt phẳng chứa tam giác được chọn song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho".

Chọn một cạnh của tứ diện: 6 cách, (giả sử chọn AB).
Chọn đường thẳng song song với AB : 6 cách, (giả sử chọn PQ).
Chọn đỉnh thứ 3: 6 cách, (M, N, E, K, F, I).

Suy ra $n(T) = 6.6.6 = 216$. Vậy $\frac{n(T)}{n(\Omega)} = \frac{216}{810} = \frac{4}{15}$.

Câu 16. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $a_n = 10a_{n-1} - 1$, $\forall n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$

A. 100. **B.** 101. **<u>C</u>.** 102. **D.** 103.

<u>Lời giải.</u>

$a_n = 10a_{n-1} - 1 \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{9} = 10\left(a_{n-1} - \frac{1}{9}\right)$ (1).

Đặt $b_n = a_n - \frac{1}{9} \Rightarrow b_1 = a_1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Từ (1) $\Rightarrow b_n = 10b_{n-1}, \forall n \geq 2$

Dãy (b_n) là cấp số nhân với công bội là $q = 10$. Nên $b_n = b_1.q^{n-1} = \frac{8}{9}.10^{n-1}$.

Do đó $a_n = b_n + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}10^{n-1} + \frac{1}{9}, \forall n = 1, 2, \ldots$.

Ta có $\log a_n > 100 \Leftrightarrow a^n > 10^{100} \Leftrightarrow \frac{8}{9}10^{n-1} + \frac{1}{9} > 10^{100}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$ là $n = 102$.

Câu 17. Cho phương trình $2\cos^2 3x + (3 - 2m)\cos 3x + m - 2 = 0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$. là

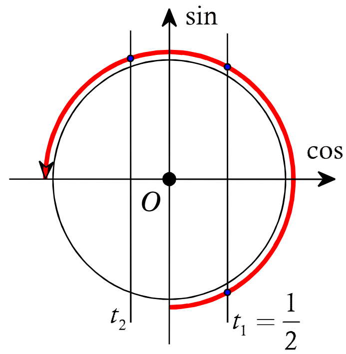
A. 3. **<u>B</u>.** 2 **C.** 1 **D.** 4

<u>Lời giải.</u>

Với $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow 3x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Đặt $t = \cos 3x$ $(-1 \leq t \leq 1)$. Phương trình trở thành $2t^2 + (3 - 2m)t + m - 2 = 0$.

Ta có $\Delta = (2m-5)^2 \longrightarrow$ phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = m-2 \end{array}\right.$.



Ta thấy ứng với một nghiệm $t_1 = \dfrac{1}{2}$ thì cho ta hai nghiệm x thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$.

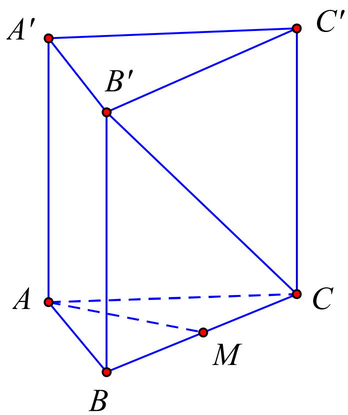
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t_2 \le 0 \\ t_2 = 1 \end{array}\right.$ (tham khảo hình vẽ)

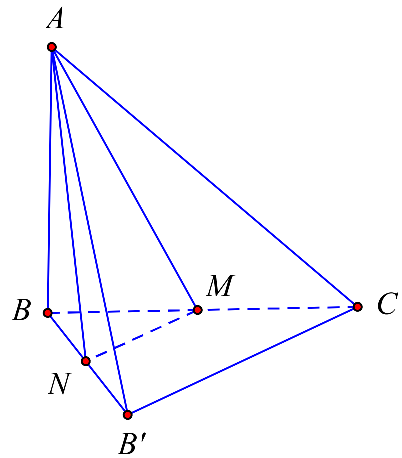
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m-2 \le 0 \\ m-2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m \le 2 \\ m = 3 \end{array}\right.$$

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. <u>**D.**</u> $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải





Tam giác ABC vuông và $AB = BC = a$ nên ΔABC chỉ có thể vuông tại B.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCB')$.

Kẻ $MN \,//\, B'C \Rightarrow B'C \,//\, (AMN)$

$\Rightarrow d = d(B'C, MN) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN)) = d(B, (AMN))$.

Vì tứ diện $BAMN$ là tứ diện vuông nên

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}\,(C)$ và $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$. **B.** $k_1.k_2 = 2$. **C.** $k_1.k_2 = 3$. **D.** $k_1.k_2 = 4$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-2x + m - 1 = \frac{x+1}{x+2}$ (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2x^2 - (m-6)x - 2m + 3 = 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 4m + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in R$.

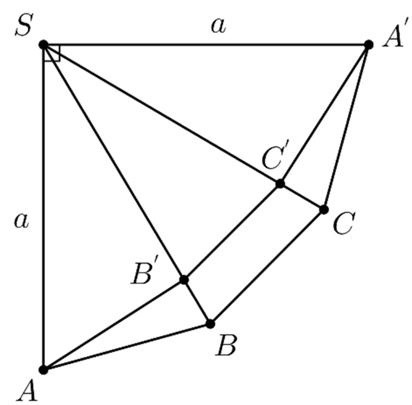
Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m-6}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3-2m}{2} \end{cases}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C) là $\begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{(x_1+2)^2} \\ k_2 = \dfrac{1}{(x_2+2)^2} \end{cases}$.

Ta có $k_1.k_2 = \dfrac{1}{(x_1+2)^2}.\dfrac{1}{(x_2+2)^2} = \dfrac{1}{[x_1.x_2 + 2(x_1+x_2)+4]^2} = \dfrac{1}{\left[\dfrac{3-2m}{2} + 2.\dfrac{m-6}{2} + 4\right]^2} = 4$.

Câu 20. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = 20°$, $\widehat{BSC} = 30°$, $\widehat{CSA} = 40°$. Mặt phẳng (α) bất kì qua A cắt SB, SC tại B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\Delta AB'C'$.

A. $a\sqrt{3}$. **<u>B.</u>** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.



Trải các tam giác SAB, SBC, SCA trên một mặt phẳng như hình trên. Tam giác SAC trở thành tam giác $SA'C$.
Khi đó $C = AB' + B'C' + C'A' \geq AA' = a\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi A, B', C', A' thẳng hàng.

Vậy chu vi tam giác $\Delta AB'C'$ nhỏ nhất bằng $a\sqrt{2}$.

MỨC 4

Câu 21. Cho phương trình $3^{x^2+2mx+4m-3}-2=\left|\dfrac{m-2}{x+m}\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-6;0]$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Với điều kiện trên $3^{x^2+2mx+4m-3}-2=\left|\dfrac{m-2}{x+m}\right| \Leftrightarrow 3^{(x+m)^2-(m-2)^2+1}-2=\left|\dfrac{m-2}{x+m}\right|$.

Đặt $t=|x+m|, t>0$ ta được: $3^{t^2-(m-2)^2+1}-2=\dfrac{|m-2|}{t}$ $(*)$.

Nhận thấy: Hàm số $f(t)=3^{t^2-(m-2)^2+1}-2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hàm số $g(t)=\dfrac{|m-2|}{t}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Và $f(|m-2|)=g(|m-2|)$. Vậy $(*)$ có nghiệm duy nhất $t=|m-2|$.

Khi đó $|x+m|=|m-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2-2m \end{array}\right.$.

Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-6;0] \Leftrightarrow \begin{cases} -6\le 2-2m\le 0 \\ 2-2m\ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m\le 4 \\ m\ne 2 \end{cases}$.

Do m nguyên nên $m\in\{1;3;4\}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn

$[f'(x)]^2=4.\left[2x^2+1-f(x)\right]$ với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$ và $f(1)=2$. Giá trị $I=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{4}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn

Ta có $[f'(x)]^2=4.\left[2x^2+1-f(x)\right] \Leftrightarrow [f'(x)]^2+4f(x)=4.\left(2x^2+1\right)$.

Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1 ta được $\int_0^1 \left[\left[f'(x) \right]^2 + 4f(x) \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 4.\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \mathrm{d}x + 4\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{20}{3}$. (*)

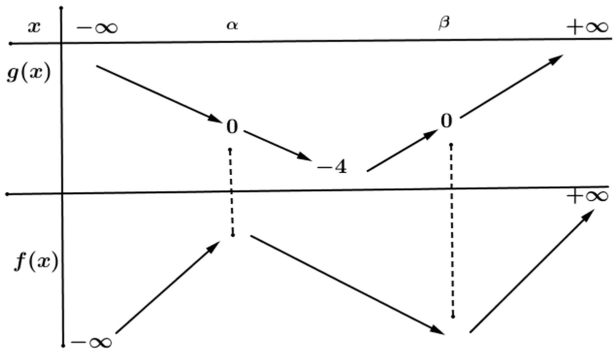
Xét $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x.$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \mathrm{d}x + 4xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{20}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x + \dfrac{4}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 4x^2\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - 2x \right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + C$. Vì $f(1) = 2$ nên $C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$. Vậy $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{4}$.

Câu 23. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1 - 2d$ và $g(x) = cx^2 - 2x + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 30$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), x = -3, x = 6$ bằng



A. $\dfrac{2113}{12}$.   **B.** $\dfrac{1123}{12}$.   **C.** $\dfrac{1231}{12}$.   **D.** $\dfrac{1321}{12}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3ax^2 - 6x + b$

Từ BBT suy ra $f'(x)$ và $g(x)$ có chung hai nghiệm là α và β

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{2}{c}=\dfrac{6}{3a} \\ \alpha.\beta=\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{3a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=3d \end{cases}$$

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có đỉnh $I\left(\dfrac{1}{c};-4\right)$ và $c>0$

$$\Rightarrow c.\frac{1}{c^2}-\frac{2}{c}+d=-4 \Leftrightarrow d=\frac{1}{c}-4 \Rightarrow b=\frac{3-12c}{c}$$

Xét $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow ax^3-\left(3+c\right)x^2+\left(b+2\right)x+1-3d=0\ (*)$

Từ giả thiết suy ra phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa mãn

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=30 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=30$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c+3}{a}\right)^2-2.\frac{b+2}{a}=30 \Leftrightarrow \left(\frac{c+3}{c}\right)^2-2.\frac{\dfrac{3-12c}{c}+2}{c}=30$$

$$\Leftrightarrow \left(c+3\right)^2-2\left(3-10c\right)-30c^2=0 \Leftrightarrow -29c^2+26c+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} c=1 & \left(tm\right) \\ c=-\dfrac{3}{29} & \left(loai\right) \end{array}\right.$$

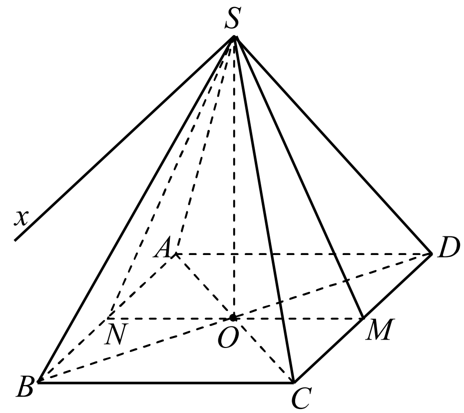
$$\Rightarrow c=1; a=1; b=-9; d=-3$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)-g\left(x\right)=x^3-4x^2-7x+10 \Rightarrow S=\int_{-3}^{6}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{6}\left|x^3-4x^2-7x+10\right|\mathrm{d}x=\frac{1321}{12}$$

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1$, $AD=\sqrt{10}$, $SA=SB$, $SC=SD$. Biết mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SCD\right)$ vuông góc nhau đồng thời tổng diện tích của hai tam giác ΔSAB và ΔSCD bằng 2 . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải



Ta có $V_{S.ABCD}=2V_{A.SCD}=\frac{2}{3}d\left(A,\left(SCD\right)\right).S_{SCD}$

Ta có $\left(SAB\right)\cap\left(SCD\right)=Sx\ //\ AB$. Gọi M là trung điểm của CD, N là trung điểm của AB.

$\Rightarrow SM\perp CD$, $SN\perp AB\Rightarrow SM\perp Sx$, $SN\perp Sx$.

Mặt khác $\left(SAB\right)\perp\left(SCD\right)\Rightarrow SN\perp\left(SCD\right)$ tại S, $\widehat{NSM}=90^\circ$

$d\left(A,\left(SCD\right)\right)=d\left(N,\left(SCD\right)\right)=SN\ \Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{2}{3}.SN.\frac{1}{2}.SM.CD$.

$SN^2+SM^2=MN^2=AD^2=10$.

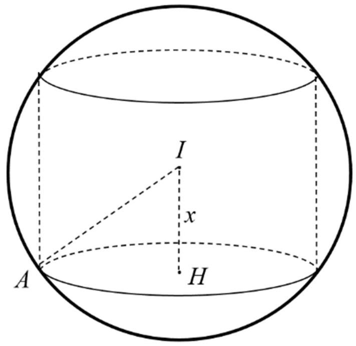
$2=S_{SAB}+S_{SCD}=\frac{1}{2}SN.AB+\frac{1}{2}SM.CD=\frac{1}{2}AB\left(SN+SM\right)\Rightarrow SN+SM=4$

$\Rightarrow SN^2+SM^2+2SN.SM=16\Rightarrow SN.SM=3$. Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.3.1=1$.

Câu 25. Cho mặt cầu $\left(S\right)$ có bán kính R không đổi, hình trụ $\left(T\right)$ bất kì nội tiếp mặt cầu $\left(S\right)$. Thể tích khối trụ $\left(T\right)$ là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **B.** $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi I là tâm mặt cầu. Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình trụ.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2}+1=\dfrac{V}{V-V_1}$. Do đó để $\dfrac{V_1}{V_2}$ đạt GTLN thì V_1 đạt GTLN.

Đặt $IH=x\left(0<x<R\right)$. Ta có $V_1=\pi HA^2.2IH=\pi\left(R^2-x^2\right).2x=\pi\left(-2x^3+2xR^2\right)$

Đặt $g\left(x\right)=-2x^3+2xR^2$.

Ta có $g'\left(x\right)=-6x^2+2R^2$ $\qquad g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -6x^2+2R^2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}R}{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\sqrt{3}R}{3}$		R
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4\sqrt{3}R^3}{9}$	$\searrow$	0

Suy ra V_1 có GTLN là $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$. Thể tích khối cầu là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V}{V-V_1}-1=\dfrac{\dfrac{4}{3}\pi R^3}{\dfrac{4}{3}\pi R^3-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3}-1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.