

NĂM HỌC 2021 – 2022

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 25 tháng 4 năm 2021

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 01 trang

Câu I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+1}{1-x}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Đặt $P = B : A$. Tìm các giá trị nguyên của x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Câu II (2,0 điểm)

- 1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một khu vườn có chiều dài hơn chiều rộng 6 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 4 m thì diện tích khu vườn tăng thêm 80 m². Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

2) Một chiếc mũ giấy có dạng hình nón, với độ dài đường sinh bằng 30 cm và đường kính đáy bằng 15 cm. Tính diện tích giấy để làm mũ (không kể riềm, mép, phần thừa). Lấy $\pi \approx 3,14$.

Câu III (2,5 điểm)

- 1) Giải phương trình $x^4 + 3x^2 - 28 = 0$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $(d): y = (m-1)x + 2$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2$ và $|2x_1| - |x_2| = 2 + x_1$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là tiếp điểm) và cát tuyến ABC không qua O (tia AC nằm giữa AN và AO ; B nằm giữa A và C).

- 1) Chứng minh bốn điểm A, M, O, N thuộc cùng một đường tròn.

2) Qua M kẻ đường thẳng song song với AC , cắt đường tròn tại điểm thứ hai E . NE cắt BC tại I .

Chứng minh $\widehat{MON} = 2\widehat{NIB}$ và I là trung điểm của BC .

- 3) MN cắt BC tại K . Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Câu V (0,5 điểm) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab}$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên:..... Số báo danh:

Lưu ý: - Điểm toàn bài để lẻ đến 0,25.

- Học sinh giải cách khác đúng cho điểm tối đa.

- Câu IV: học sinh vẽ sai hình trong phạm vi câu nào, không chấm điểm câu đó.

Câu		Nội dung	Điểm
I (2đ)	1 (0,5)	Thay $x=4$ (tmđk) vào $A: \frac{2}{\sqrt{4}-1}$	0,25
		Tính được $A=2$. Kết luận	0,25
	2 (1,0)	$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{x+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$= \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}-1-x-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$= \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$= \frac{2}{\sqrt{x}+1}$	0,25
	3 (0,5)	Tính $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. Để $\sqrt{P}$ có nghĩa, $P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \geq 0$. Tìm được $x \geq 1$. Kết hợp điều kiện $x \neq 1 \Rightarrow x > 1$	0,25
		$\sqrt{P} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow P < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1} < 0$	
		Chỉ ra được $3\sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{5}{3} \Leftrightarrow x < \frac{25}{9}$	0,25
		Kết hợp điều kiện $1 < x < \frac{25}{9}$ và x là số nguyên $\Rightarrow x=2$.	
II (2đ)	1 (1,5)	Gọi chiều dài khu vườn là x (m), chiều rộng là y (m) ($x > y, x > 6, y > 0$)	0,25
		Chiều dài hơn chiều rộng 6 m $\Rightarrow x - y = 6$ (1)	0,25
		Chiều dài sau khi tăng 2 m: $x+2$ (m) Chiều rộng sau khi tăng 4 m: $y+4$ (m)	0,25
		Diện tích tăng thêm 80 m ² : $\Rightarrow (x+2)(y+4) - xy = 80 \Leftrightarrow 4x + 2y = 72$ (2)	
		Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + 2y = 72 \end{cases}$	0,25
		Giải hệ được $\begin{cases} x = 14 \\ y = 8 \end{cases}$ (tmđk)	0,25

Câu		Nội dung	Điểm
		$\Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$. $OI \perp BC$ tại $I \Rightarrow I$ là trung điểm BC	0,25
	3	Gọi H là giao điểm của MN và AO . Chứng minh $AI.AK = AH.AO$	0,25
		Chứng minh $AB.AC = AH.AO (= AM^2) \Rightarrow AI.AK = AB.AC$	0,25
		I là trung điểm BC , H là giao điểm của MN và AO $\Rightarrow BI = IC \Rightarrow AB = AI - IB; AC = AI + IC \Rightarrow AB + AC = 2AI$	0,25
		$\Rightarrow \frac{AB + AC}{2}.AK = AB.AC \Rightarrow \frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ (đpcm)	0,25
V (0,5)		Áp dụng bất đẳng thức Cô – si: $\frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{a}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{2\sqrt{bc}}; \frac{b}{b^2 + ca} \leq \frac{1}{2\sqrt{ca}}; \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$	0,25
		$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab + bc + ca}{abc}$ $\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 3$.	0,25