

ĐỀ CƯƠNG ÔN THI HỌC KỲ I – TOÁN LỚP 9

1

Chuyên đề 1

1

Biến đổi các biểu thức chứa căn

Bài 1.1 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm

☆☆

- a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- b) Cho biểu thức $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $B = 10$.
- c) Tìm các giá trị của x để biểu thức $\frac{B}{A}$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 1.2 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm

☆☆

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$.

- a) Rút gọn P .
- b) Tính P khi $x = 14 - 6\sqrt{5}$.
- c) Tìm GTNN của P .

Bài 1.3 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm

☆☆

Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$.

- a) Rút gọn M .
- b) Tìm x để $M = 2x$.
- c) Tìm x để $P = \frac{\sqrt{x}+1}{x+M}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 1.4 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm

☆☆

Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6} \right)$.

- a) Rút gọn P .
- b) Tính P biết $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
- c) Tìm các giá trị x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

Bài 1.5 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm

☆☆

Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} \right)$.

- a) Rút gọn P .
- b) Tính giá trị của P biết $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0$.
- c) Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{3}$.

Bài 1.6 (Ngô Sỹ Liên)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ và $Q = \left(\frac{x}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$;

2

- Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 49$.
- Rút gọn biểu thức Q .
- Cho $M = P \cdot Q$. Tìm các giá trị nguyên của x thỏa mãn $|M| > M$.

Bài 1.7 (Ngô Sỹ Liên)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 4$).

- Tính A khi $x = \frac{1}{9}$.
- Rút gọn B .
- So sánh $B : A$ với 2.

Bài 1.8 (Ngô Sỹ Liên)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Cho biểu thức $A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

- Khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$, tính giá trị biểu thức A .
- Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$.
- Tìm x để biểu thức $M = B - A$ nhận giá trị nguyên.

Bài 1.9 (Ngô Sỹ Liên)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}-1}$; $B = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}+1}$.

- Tính giá trị B tại $x = 36$.
- Rút gọn A .
- Biết $P = A : (1 - B)$. Tìm x để $P \leq 1$.

Bài 1.10 (Ngô Sỹ Liên)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Cho biểu thức $B = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3}\right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Rút gọn B .
- Tính giá trị của B khi $x = \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{18+8\sqrt{2}}$.
- Chứng minh $B > \frac{1}{3}$.

Bài 1.11 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Thực hiện các phép tính sau:

- $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{36} - \frac{18}{5} \cdot \sqrt{\frac{25}{81}} + \sqrt{(-12)^2}$.
- $(2\sqrt{50} + 6\sqrt{32} - \sqrt{162}) : \sqrt{2}$.
- $(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})^2$.
- $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

$$e) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}.$$

$$f) \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \frac{3\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+3} + \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

$$g) \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} - \sqrt{6-\sqrt{20}} + \frac{2}{\sqrt{5}-2}.$$

$$h) \left(3\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75} - 4\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \cdot 2\sqrt{3}.$$

Bài 1.12 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 25.$$

$$b) \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2.$$

$$c) \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{x - 2}.$$

$$d) x - 2\sqrt{x - 4} = 4.$$

$$h) \frac{4}{5} \cdot \sqrt{25x + 50} - 5\sqrt{x + 2} + 6\sqrt{\frac{4x + 8}{9}} - 12 = 0.$$

$$e) \sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5.$$

$$f) \frac{2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5.$$

$$g) \frac{\sqrt{3x - 2}}{\sqrt{x - 1}} = 2.$$

Bài 1.13 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho $A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}.$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm GTLN của A .

c) Tìm $x \in \mathbb{Q}$ để A nhận giá trị nguyên.

Bài 1.14 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho biểu thức $A = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} + \frac{1 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}} \right)$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn A .

b) Chứng minh rằng $A > 2$, với mọi số $a > 0, a \neq 1$.

c) Tìm a thỏa mãn $A\sqrt{a} = 6\sqrt{a} - \sqrt{a - 4} - 3$.

Bài 1.15 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆ ☆

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{4}$.

c) Tìm giá trị của x để $\sqrt{A} > A$.

Bài 1.16 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆ ☆

Cho $A = \left(\frac{2x + 1}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(1 - \frac{x - 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right); B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A .

b) Đặt $M = AB$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $M \in \mathbb{Z}$.

c) Tìm GTNN của A .

- d) Tìm x để $A = \frac{1}{3}$.
 e) So sánh A với 1.
 f) Tìm x để $A < \frac{1}{2}$.

Bài 1.17 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho hai biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+4}{4-x}$ và $Q = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + 1$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Tính giá trị của Q khi $x = 6 + \sqrt{32}$.
 b) Rút gọn $A = P : Q$.
 c) Tìm GTNN của biểu thức A .

Bài 1.18 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$.

- a) Rút gọn A với $x \geq 0, x \neq 1$.
 b) $M = A \cdot B$. Tìm x nguyên để $M > \frac{4}{3}$.
 c) Tìm GTLN của biểu thức M .

Bài 1.19 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆

Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$$

- a) Rút gọn A với $(a > 0, a \neq 1, a \neq 4)$;
 b) Tìm a để $A > \frac{1}{6}$;
 c) Tìm GTNN của A với a số nguyên.

Bài 1.20 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆

Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn và tính giá trị biểu thức $P = A : B$ khi $x = \frac{1}{4}$;
 b) Tìm x để $A \leq 3B$;
 c) So sánh B với 1;
 d) Tìm x thỏa mãn $P\sqrt{x} + (2\sqrt{5}-1)\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x-4} + 3$.

Bài 1.21 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của B khi $x = 4(\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}})$
 b) Rút gọn A và tính $M = A \cdot B$
 c) Với x nguyên và $x > 15$. Tìm GTNN của B

d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $\sqrt{M} < \frac{2}{3}$

Bài 1.22 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



5

Cho biểu thức

$$A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ và } B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x > 0, x \neq 4$$

- a) Tính A khi $x = \frac{1}{4}$;
- b) Rút gọn B ;
- c) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \cdot x \leq \frac{3}{2}(\sqrt{x} - 1)$.

2

Đồ thị hàm số bậc nhất

Bài 2.1 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Cho hàm số $y = (2m - 1)x + 5$ có đồ thị là đường thẳng d .

- a) Tìm m để hàm số trên là hàm số đồng biến? nghịch biến?
- b) Tìm m để đường thẳng d cắt đường thẳng $y = x - 2$; song song với đường thẳng $y = -3x + 1$; vuông góc với đường thẳng $3x - y + 1 = 0$?
- c) Tìm m biết d và 2 đường thẳng $y = -x + 2$ và $y = 2x - 1$ đồng quy. Vẽ hình minh họa.
- d) Tìm m để d cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 3.
- e) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 1.
- f) Tìm m để d cắt Ox tại M , Oy tại N sao cho $S_{\triangle OMN} = 5$.

Bài 2.2 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Cho $(d): y = (m + 1)x + 2m + 3$

- a) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (d) luôn đi qua một điểm cố định.
- b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến (d) bằng 1.
- c) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến (d) lớn nhất.
- d) Tính giá trị của m để đường thẳng (d) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Bài 2.3 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm



Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2(x - 3) + m - 1$; $(d_2): y = 3x - m + 3$. Xác định m để giao điểm của (d_1) và (d_2) thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- a) Nằm trên trục tung.
- b) Nằm bên trái trục tung.
- c) Nằm trên trục hoành.
- d) Nằm trong góc phần tư thứ hai.
- e) Nằm phía trên trục hoành.
- f) Trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

Bài 2.4 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho hàm số $y = 2x + 3$ (d)

- Vẽ đồ thị hàm số đã cho trên mặt phẳng tọa độ Oxy
- Trong các điểm $A(\frac{-2}{3}; 1)$, $B(\frac{-1}{2}; 2)$, $C(-3; 0)$ điểm nào thuộc đồ thị hàm số (d)? Vì sao?
- Tìm tọa độ giao điểm của (d) với hàm số $d_1: y = -x + 1$.
- Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d.
- Cho hàm số $y = (m - 1)x + 2m - 3$ (d_2). Tìm m để (d_2) cắt (d) tại điểm có hoành độ bằng -1

Bài 2.5 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho đường thẳng: $y = (1 - 4m)x + m - 2$ (d). Tìm giá trị của m để:

- Đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ
- Đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc nhọn? góc tù?
- Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{1}{2}$.
- Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\frac{3}{2}$.
- Đường thẳng (d) cắt trục hoành, trục tung tại hai điểm A, B tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

Bài 2.6 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho hàm số: $y = (m + 1)x + m - 1$ (d) ($m \neq -1$; m là tham số).

- Xác định m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(7; 2)$.
- Xác định m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường $y = 3x - 4$ tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Xác định m để đường thẳng d đồng qui với 2 đường thẳng (d_1): $y = 2x + 1$ và (d_2): $y = -x - 8$
- Tìm m để ba điểm $A(2; -1)$, $B(1; 1)$ và $C(3; m + 1)$ thẳng hàng.

Bài 2.7 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Vẽ đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = \frac{-1}{2}x + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ

- Tính số đo góc tạo bởi hai đường thẳng trên với trục hoành.
- Tìm tọa độ giao điểm A của hai đồ thị trên bằng phép tính.
- Vẽ qua điểm $B(0; 2)$ một đường thẳng song song với trục Ox , cắt đường thẳng $y = x$ tại điểm C. Tìm tọa độ điểm C rồi tính diện tích tam giác ABC.

Bài 2.8

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho ba đường thẳng $d_1: y = 3x - 1$, $d_2: y = 5 - 3x$ và $d_3: y = (2m - 1)x + 4 - m$.

- Vẽ đường thẳng d_1 .
- Tìm m để $d_2 \parallel d_3$.
- Tìm m để hai đường thẳng d_1 và d_3 cắt nhau tại một điểm nằm trên trục Oy .

Cho đường thẳng $d: y = (m - 1)x + 2m + 1$.

- Tìm m để $y(2017^3) > y(2019^4)$.
- Tìm m để đường thẳng d cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho tam giác AOB cân.

Bài 2.10

Cho 2 đường thẳng $d_1: y = (m^2 + 1)x - m^2 + 2$, $d_2: y = \frac{-1}{m^2 + 1}x + \frac{3m^2 + 7}{m^2 + 1}$ (m là tham số). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì d_1, d_2 luôn cắt nhau tại một điểm M nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 2.11 (Quỳnh Mai)

Cho đường thẳng $d: y = (2k - 1)x + k - 2$

- Tìm k để đường thẳng d đi qua điểm $(-1; 5)$.
- Tìm k để đường thẳng d song song với đường thẳng $2x + 3y - 5 = 0$.
- Tìm k để đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $x + 2y = 0$.
- Chứng minh rằng khi k thay đổi đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2.12 (Quỳnh Mai)

Cho đường thẳng $d: y = (m + 1)x - 2m - 5$ (với m là tham số)

- Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m .
- Tìm m để d cùng với $d_1: y = -2x$ và $d_2: y = 9 - 5x$ đồng quy
- Tìm m để d vuông góc với đường thẳng $d_3: y = \frac{1}{4}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- Tìm m để d cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho $S_{\triangle AOB} = \frac{3}{2}$
- Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d là lớn nhất.

3

Phương trình vô tỉ và hệ phương trình

Bài 3.1 (Lương Thế Vinh)

Giải phương trình:

- $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$;
- $\sqrt{x^2 + 11} + x^2 = 31$;
- $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$;
- $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x + 10}$;
- $x^2 + 4x + 5 = 16\sqrt{x - 1} + 6\sqrt{x^2 - 16}$;
- $\sqrt[3]{x + 34} - \sqrt[3]{x - 3} = 1$;
- $\sqrt[3]{x - 2} + \sqrt{x + 1} = 3$;
- $(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$;
- $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x} = 2x - 6$;
- $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

Bài 3.2 (Phạm Thị Như Quỳnh)

Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x-1)(y-2) - (x+1)(y-3) = 4 \\ (x-3)(y+1) - (x-3)(y-5) = 18 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \\ x + 20 = 2(y - 20) \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 4\sqrt{x+3} - 9\sqrt{y+1} = 2 \\ 5\sqrt{x+3} + 3\sqrt{y+1} = 31. \end{cases}$$

Bài 3.3 (Phạm Thị Như Quỳnh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ mx + y = 4 \end{cases}$

- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất mà x và y trái dấu.
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất mà $x = |y|$.

Bài 3.4 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆

Giải hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 3y = -5; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 14; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 4y = 20 \\ 8x - 3y = 25; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{4}{y-1} = 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{1-y} = 8; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18}. \end{cases}$$

Bài 3.5 (Ngô Sỹ Liên)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = 10 \\ 2x - 3y = 6. \end{cases}$

- Giải hệ phương trình với $m = 1$.
- Tìm m để hệ vô nghiệm.

Bài 3.6 (Ngô Sỹ Liên)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1. \end{cases}$

- Giải hệ phương trình khi $m = 1$;
- Tìm để để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn: $x - y = 2$;
- Chứng minh rằng khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì điểm $M(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5. \end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất mà $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4

Quan hệ giữa (P) và (d)

Bài 4.1 (Ngô Sỹ Liên)

Cho hàm số: $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .

- Tìm các điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt bằng -1 và 2 .
- Viết phương trình đường thẳng AB .
- Viết phương trình đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 4.2 (Ngô Sỹ Liên)

Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = mx + 2m + 1$ có đồ thị (d) .

- Chứng minh (d) luôn đi qua một điểm M cố định;
- Tìm a để (P) đi qua điểm cố định đó;
- Viết phương trình đường thẳng qua M và tiếp xúc với parabol (P) tại M .

Bài 4.3 (Ngô Sỹ Liên)

Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y = 2x - \frac{3}{2}$

- Vẽ (d) và (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .
- Tìm tọa độ giao điểm A và B của (d) và (P) . Tính chu vi $\triangle AOB$.
- Tìm tọa độ điểm C thuộc Ox để chu vi tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất.
- Cho đường thẳng (d_1) có phương trình: $y = nx + 1$. Xác định n để đường thẳng (d_1) cắt (P) tại 2 điểm nằm về một phía của trục Oy .

5

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Bài 5.1

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- Biết $AH = 12$ cm, $CH = 5$ cm. Tính AC, AB, BC, BH .
- Biết $AB = 30$ cm, $AH = 24$ cm. Tính AC, CH, BC, BH .
- Biết $AC = 20$ cm, $CH = 16$ cm. Tính AB, AH, BC, BH .
- Biết $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính AC, AH, BH, CH .
- Biết $BH = 9$ cm, $CH = 16$ cm. Tính AC, AB, BC, AH .

Bài 5.2

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Giải tam giác ABC vuông tại A , biết:

- a) $AB = 6 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 40^\circ$.
 b) $AB = 10 \text{ cm}$, $\widehat{C} = 35^\circ$.
 c) $BC = 20 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 58^\circ$.
 d) $BC = 82 \text{ cm}$, $\widehat{C} = 42^\circ$.
 e) $BC = 32 \text{ cm}$, $AC = 20 \text{ cm}$.
 f) $AB = 18 \text{ cm}$, $AC = 21 \text{ cm}$.

Bài 5.3

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $BC = 8 \text{ cm}$, $BH = 2 \text{ cm}$.

- a) Tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC , AH .
 b) Trên cạnh AC lấy điểm K ($K \neq A$, $K \neq C$), gọi D là hình chiếu của A trên BK . Chứng minh rằng: $BD \cdot BK = BH \cdot BC$.
 c) Chứng minh rằng: $S_{\triangle BHD} = \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle BKC} \cdot \cos^2 \widehat{ABD}$.

Bài 5.4

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Một người A đang ở trên khinh khí cầu ở độ cao 150 m nhìn thấy một vật B trên mặt đất cách hình chiếu của khí cầu xuống đất một khoảng 285 m . Tính góc hạ của tia AB . Nếu khinh khí cầu tiếp tục bay lên thẳng đứng thì khi góc hạ của tia AB là 46° thì độ cao của khinh khí cầu là bao nhiêu? (làm tròn đến mét).

Bài 5.5

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Tính chiều cao của một ngọn núi cho biết tại hai điểm cách nhau 1 km trên mặt đất người ta nhìn thấy đỉnh núi với góc nâng lần lượt là 40° và 32° .

Bài 5.6

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc (như hình vẽ). Cho biết đoạn thẳng AB dài 762 m , góc A bằng 6° , góc B bằng 4° .

- a) Tính chiều cao h của con dốc.
 b) Hỏi bạn An đi hết con dốc trong bao lâu? Biết rằng tốc độ trung bình lên dốc là 4 m/s và tốc độ trung bình xuống dốc là 19 m/s .

Bài 5.7

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Từ đỉnh một tòa nhà cao 54 m , người ta nhìn thấy một ô tô đang đỗ dưới một góc nghiêng xuống là 40° . Hỏi ô tô đang đỗ cách tòa nhà đó bao nhiêu mét?

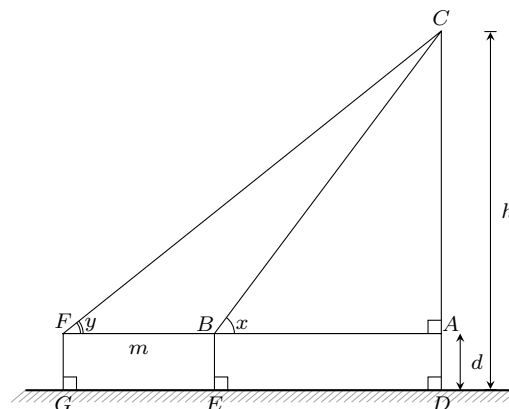
Bài 5.8

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Một người đứng trên đỉnh tháp cao 325 m nhìn thấy 2 điểm A và B với hai góc hạ lần lượt là 37° và 72° . Tính khoảng cách AB .

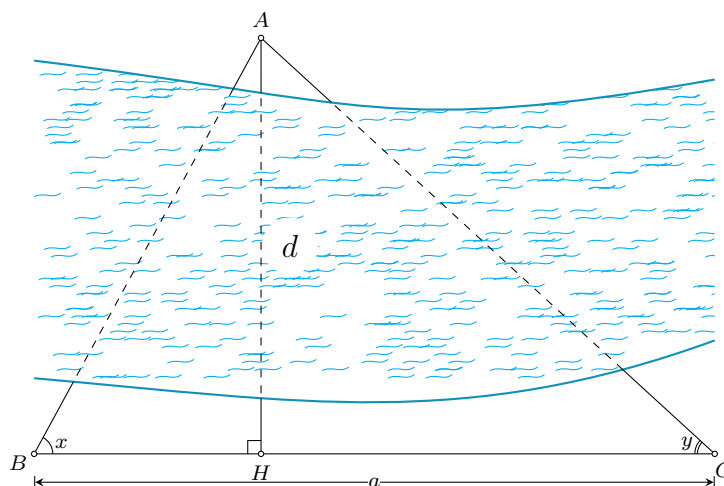
Cho hình bên, hãy giải thích tại sao chiều cao $h = AB$ có thể tính được bởi công thức:

$$h = d + \frac{m}{\cot y - \cot x}?$$

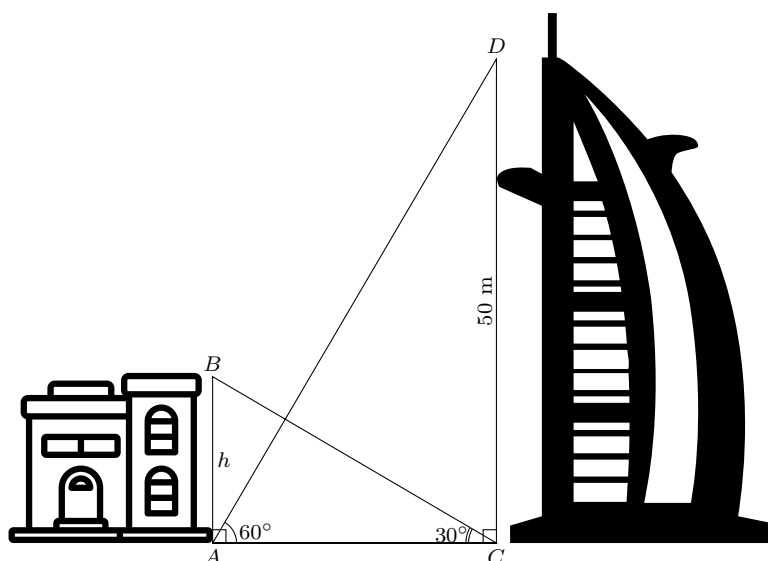


Giải thích tại sao chiều cao $d = AH$ giữa hai bên bờ sông được tính bởi công thức

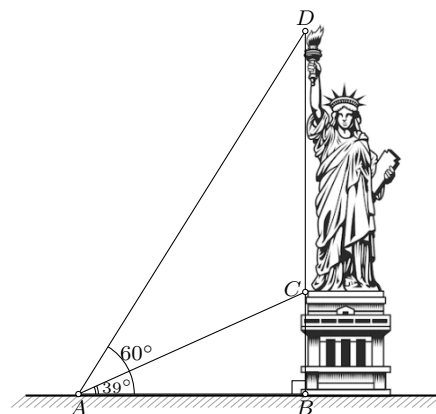
$$d = \frac{a}{\cot x + \cot y}?$$



Tính chiều cao h của ngôi nhà bên trái trong hình bên.



Tượng nữ thần tự do (Liberty Enlightening the World ở New York-Mỹ) cao 46m được đặt trên một cái bệ. Tại một điểm trên mặt đất người ta nhìn thấy nóc tượng và nóc bệ với các góc nâng lần lượt là 60° và 39° . Tính chiều cao của cái bệ (hình bên)



6 Đường tròn

Bài 6.1 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆ ☆

Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại A . Trên d lấy M , đường thẳng MB cắt (O) tại điểm thứ hai là C . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt d tại I . Chứng minh rằng

- Bốn điểm O, A, I, C cùng thuộc một đường tròn.
- I là trung điểm của AM . Chứng minh rằng $MB \cdot MC = OM^2 - \frac{AB^2}{4}$
- Trọng tâm G của tam giác AOC luôn thuộc một đường tròn cố định khi M thay đổi trên d

Bài 6.2 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆ ☆

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{ABM} < 45^\circ$, vẽ dây cung MN vuông góc với AB . Tia BM cắt NA tại P ; Q là điểm đối xứng của P qua đường thẳng AB , gọi K là giao điểm của PQ với AB .

- Chứng minh rằng P, K, A, M cùng thuộc một đường tròn
- Chứng minh rằng ba điểm Q, N, B thẳng hàng và tam giác PKM cân
- Chứng minh rằng KM là tiếp tuyến của (O)
- Xác định M trên (O) để tứ giác $PKNM$ trở thành hình thoi.

Bài 6.3 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax , lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) .

- Chứng minh bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $BM \parallel OP$.
- Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BM tại N . Chứng minh tứ giác $ONBP$ là hình bình hành.
- Giả sử AN cắt OP tại K , PM cắt ON tại I , PN cắt OM tại J . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

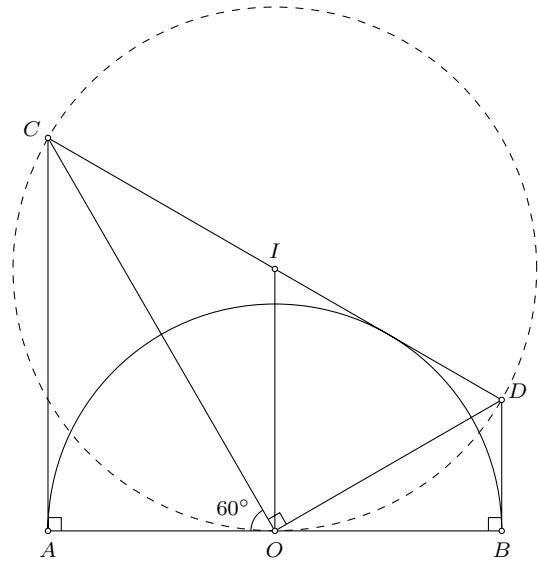
Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB . Gọi M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB . Vẽ đường tròn $(M; MH)$. Kẻ các tiếp tuyến $AC; BD$ với đường tròn tâm M (C và D là các tiếp điểm khác H).

- Chứng minh C, M, D thẳng hàng.
- Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Chứng minh khi M di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì tổng $AC + BD$ không đổi.
- Giả sử CD và AB cắt nhau tại I . Chứng minh: $OH.OI$ không đổi.

Bài 6.5 (Lương Thế Vinh)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ các tiếp tuyến Ax và By . Trên Ax lấy điểm C , nối OC . Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt By tại D .

- Tứ giác $ABCD$ là hình gì?
- Chứng minh rằng $CA.DB = R^2$.
- Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua ba điểm C, O, D .
- Cho $\widehat{AOC} = 60^\circ$. Tính CA, DB, CD theo R .



Bài 6.6 (Lương Thế Vinh)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với (O) . Lấy M bất kì trên (O) . Kẻ tiếp tuyến thứ 3 với nửa đường tròn tại M cắt Ax và By tại C và D .

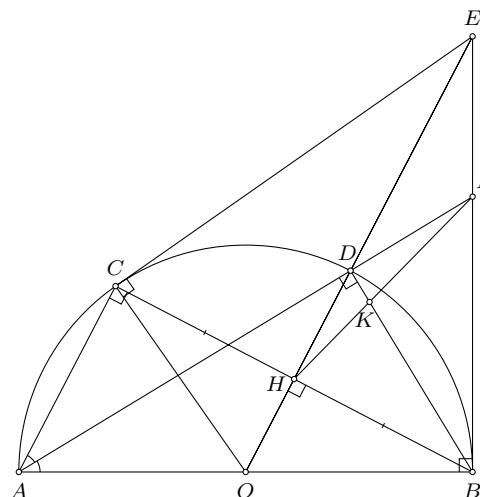
- Chứng minh rằng Tam giác COD là tam giác vuông và tích $AC \cdot BD$ không phụ thuộc vị trí của M .
- AM cắt OC tại E , BM cắt OD tại F . Tứ giác $MEOF$ là hình gì?
- Tứ giác $AEFO$; $AEFB$ là hình gì?
- Chứng minh rằng $EC.EO + FO.FD = R^2$.
- Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác COD .
- Xác định vị trí của M để chu vi ; diện tích hình thang $ACDB$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tia BM cắt Ax tại K . Chứng minh rằng C là trung điểm AK
- Kẻ đường cao MH của tam giác AMB . MH cắt BC tại N . Chứng minh rằng N là trung điểm MH và A, N, D thẳng hàng.
- Tìm quỹ tích giao điểm của AF và OM ; giao điểm của AF và OE
- Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác MOH lớn nhất.

Bài 6.7 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, C thuộc (O) , kẻ OH vuông góc BC, OH cắt tiếp tuyến tại B ở E . Gọi D là giao điểm của OE với (O) , M là giao điểm của AD với BC .

- Chứng minh: $\widehat{ACB} = \widehat{ABE}$ và H là trung điểm của BC .
- Chứng minh: AD là phân giác của $\widehat{CAB}$.
- Chứng minh: EC là tiếp tuyến của (O) .
- AD cắt BE tại I, IH cắt BD tại K . Chứng minh: $KH.BI = IK.BH$.

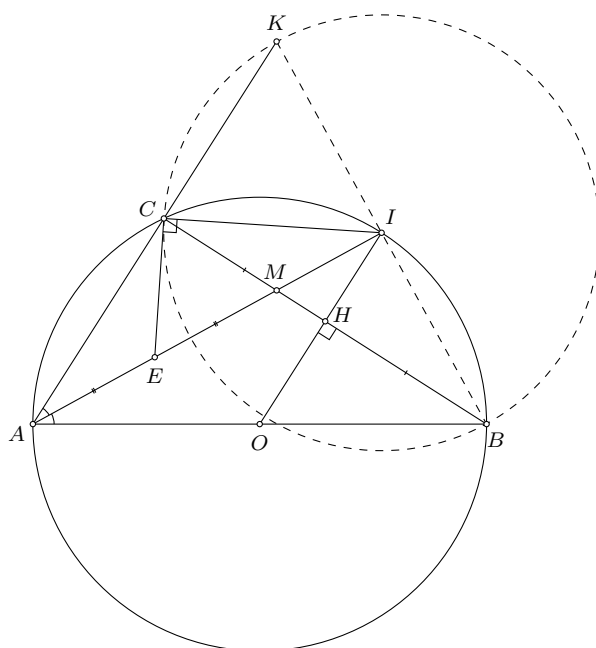


Bài 6.8 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho (O) đường kính AB, C thuộc (O) ; kẻ bán kính OI vuông góc BC tại H , gọi M là giao điểm của BC và AI . Vẽ (I) bán kính IB, AC cắt (I) tại K .

- Chứng minh: H là trung điểm của BC .
- Chứng minh: AI là phân giác của $\widehat{CAB}$.
- Chứng minh: B, I, K thẳng hàng.
- Gọi E là trung điểm của AM , chứng minh: CE là tiếp tuyến của (I)

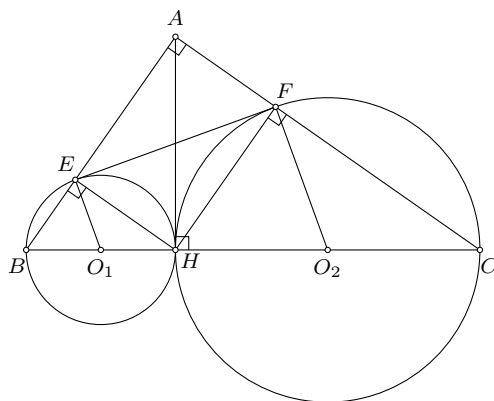


Bài 6.9 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

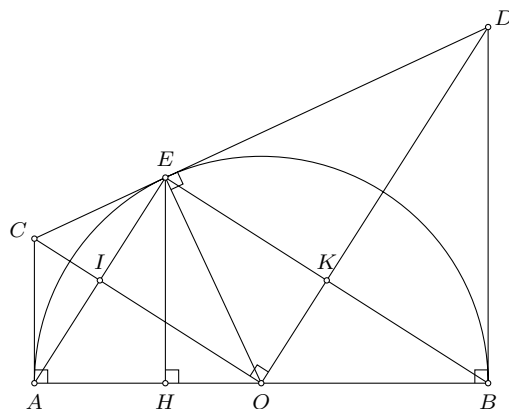
Cho tam giác ABC vuông ở A có đường cao AH ($AB < AC$). Vẽ đường tròn (O_1) đường kính BH và (O_2) đường kính CH .

- Xác định vị trí tương đối của (O_1) và (O_2) .
- AB cắt (O_2) tại D, AC cắt (O_1) tại E . Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.
- Giả sử $AH = 2\sqrt{2}$ cm; $AB = 3$ cm. Tính các cạnh của tam giác ABC .



Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Vẽ bán kính OE bất kỳ, tiếp tuyến của nửa đường tròn tại E cắt Ax, By theo thứ tự ở C và D .

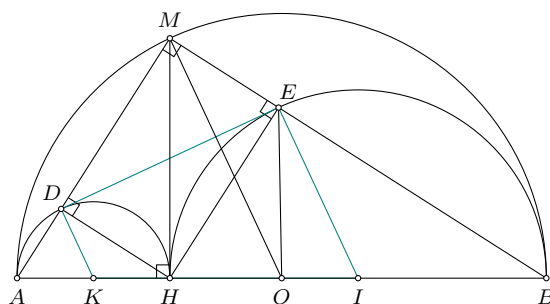
- Chứng minh: $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- Gọi I là giao điểm của OC và AE , K là giao điểm của OD và BE , tứ giác $EIOK$ là hình gì? Tại sao?
- Chứng minh: $OI \cdot OC = OK \cdot OD$.
- Gọi H là hình chiếu của E trên AB . Tìm vị trí của điểm E trên nửa đường tròn để diện tích $\triangle EOH$ đạt giá trị lớn nhất.



Bài 6.11 (Lương Thế Vinh)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . M là 1 điểm di động trên nửa $(O; R)$. Kẻ $MH \perp AB$. Vẽ nửa đường tròn tâm K đường kính AH cắt AM tại D . Vẽ nửa đường tròn tâm I , đường kính HB cắt MB ở E .

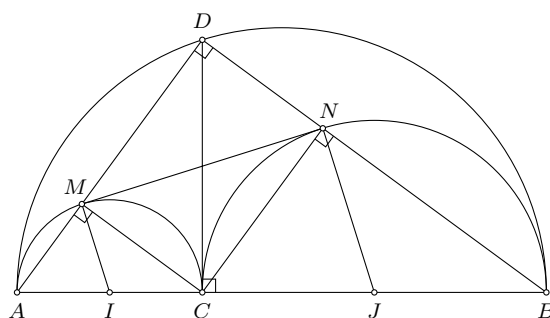
- Tứ giác $MDHE$ là hình gì?
- Chứng minh rằng $MD \cdot MA = ME \cdot MB$.
- Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến chung của 2 nửa đường tròn (K) và (I) .
- Xác định vị trí của M để tứ giác $DEIK$ có diện tích lớn nhất.



Bài 6.12 (Lương Thế Vinh)

Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa A và B . Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn đường kính AB và AC, CB . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D ; DA, DB cắt nửa đường tròn đường kính AC, CB tại M, N .

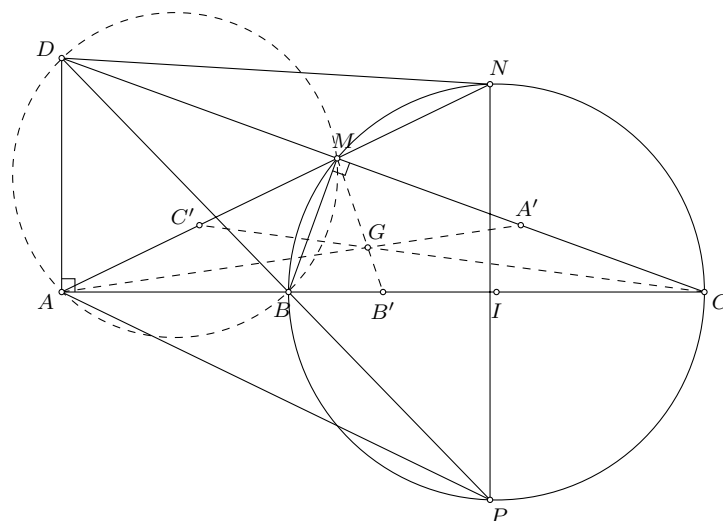
- Tứ giác $DMCN$ là hình gì?
- Chứng minh rằng $DM \cdot DA = DN \cdot DB$.
- MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn đường kính AC, CB .
- Xác định vị trí điểm C để MN có độ dài lớn nhất.



The diagram illustrates a geometric construction involving a circle with center O and diameter AB . A point M is located outside the circle. From M , two tangent lines are drawn to the circle, touching it at P and B . A secant line is also drawn from M , passing through points I and N on the circle, and further through points K and Q . The point H is the midpoint of the diameter AB . Several other lines are shown, including MP , MB , MO , MA , ME , PA , PB , QA , QB , KA , KB , NA , NB , IA , IB , and EA . The diagram uses solid black lines for most constructions, dashed green lines for auxiliary circles, and blue lines for specific segments like PQ and KN .

- Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và đường thẳng (d) vuông góc với AC tại A . Vẽ đường tròn đường kính BC , trên đó lấy điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D ; tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N ; tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P .



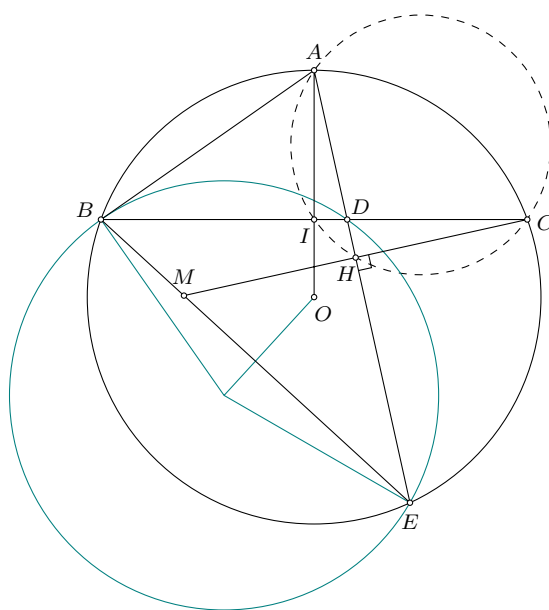
- Chứng minh rằng tứ giác $ABMD$ nội tiếp được.
- Tứ giác $APND$ là hình gì? Tại sao?
- Chứng minh rằng : $CM \cdot CD$ không phụ thuộc vị trí của M .
- Chứng minh trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

Bài 6.15 (Ngô Sỹ Liên)

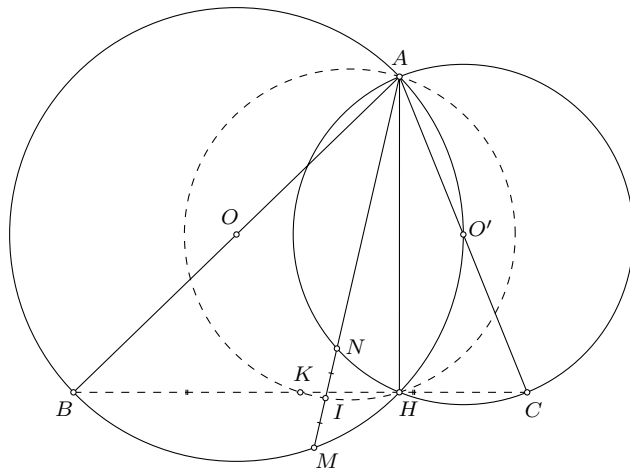
Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Cho đường tròn $(O; R)$ với dây BC cố định (BC không qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Điểm E thuộc cung lớn BC . Nối AE cắt BC tại D . Hạ $CH \perp AE$ tại H ; CH cắt BE tại M . Gọi I là trung điểm của BC .

- Chứng minh bốn điểm A, I, H, C thuộc một đường tròn;
- Chứng minh khi E chuyển động trên cung lớn BC thì tích $AD \cdot AE$ không đổi;
- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BED tiếp xúc với AB ;
- Tìm vị trí của E để diện tích tam giác MAC lớn nhất.



Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và H (O và O' ở hai phía của AH). Vẽ các đường kính AOB và $AO'C$ của hai đường tròn. Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại M , cắt đường tròn (O') tại N .



- Chứng minh 3 điểm B, H, C thẳng hàng.
- Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì tỉ số $\frac{HM}{HN}$ không đổi.
- Gọi I, K lần lượt là trung điểm MN và BC . Chứng minh bốn điểm A, H, I, K thuộc một đường tròn.
- Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích $\triangle HMN$ lớn nhất.

Bài 6.17

Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm của đoạn OB . Dây CD vuông góc với AB tại M . Điểm E chuyển động trên cung lớn CD (E khác A). Nối AE cắt CD tại K . Nối BE cắt CD tại H .

- Chứng minh 4 điểm B, M, E, K thuộc một đường tròn;
- Chứng minh $AE \cdot AK$ không đổi;
- Tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BBC ;
- Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHK luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm E chuyển động trên cung lớn CD .

Bài 6.18

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Điểm M thuộc nửa đường tròn. Gọi H là điểm chính giữa cung AM . Tia BH cắt AM tại I . Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A cắt BH tại K . Nối AH cắt BM tại E .

- Chứng minh tam giác BAE là tam giác cân. Chứng minh $KH \cdot KB = KE^2$.
- Đường tròn tâm B , bán kính BA cắt AM tại N . Chứng minh tứ giác $BIEN$ nội tiếp.
- Tìm vị trí của M để $\widehat{MKA} = 90^\circ$.

Bài 6.19 (Ngô Sỹ Liên)

Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Điểm H thuộc đoạn OB , H khác O và B . Dây CD vuông góc với AB tại H . Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại A . Nối CO và DO cắt đường thẳng d tại M và N . Các đường thẳng CM và DN cắt đường tròn (O) tại E và F , ($E \neq C, F \neq D$).

- Chứng minh $MNFE$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $ME \cdot MC = NF \cdot ND$.
- Tìm vị trí của H để $AEOF$ là hình thoi.
- Lấy K đối xứng với C qua A . Gọi G là trọng tâm tam giác KAB . Chứng minh rằng khi H

chuyển động trên đoạn OB thì G thuộc một đường tròn cố định.

Bài 6.20 (Ngô Sỹ Liên)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

19

Cho tam giác ABC có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi E' là điểm đối xứng với H qua AC , F' là điểm đối xứng với H qua AB . Chứng minh:

- Tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O).
- Năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn.
- AO và EF vuông góc với nhau.
- Khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

7

Một số bài toán nâng cao

Bài 7.1 (Nguyễn Trường Tộ)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆

Tìm GTLN, GTNN (nếu có) của biểu thức:

- $A = x - 4\sqrt{x} + 10$
- $B = \sqrt{x^2 - 4}$.
- $C = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$.
- $D = \sqrt{x - 2} + \sqrt{6 - x}$.
- $E = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 8}$.
- $G = \frac{x + 3}{\sqrt{x} + 2}$.
- $H = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x < 1$.
- $I = \frac{1}{3 - \sqrt{4 - x^2}}$.
- $K = \frac{2}{1 - x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.
- $M = 2x + 3y$ biết $2x^2 + 3y^2 \leq 5$.

Bài 7.2 (Nguyễn Trường Tộ)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆ ☆

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$ với $a > b$ và $ab = 1$.
- Nếu $a + b + c = 1$ thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.
- $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$ với $a; b; c > 0$.
- $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}$ với $a > c; b > c; c > 0$.
- Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ thì $ab + bc + ca + a + b + c \leq 6$.

Bài 7.3 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆ ☆

Giải các phương trình sau

- $x^2 + 2015x - 2014 = 2\sqrt{2017x - 2016}$;
- $\frac{1}{(x - 1)^2} + \sqrt{3x + 1} = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x + 2}$;
- $(\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 2})(\sqrt{x^2 + 7x + 10} + 1) = 3$.

Bài 7.4 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆ ☆ ☆ ☆

Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b + c}} + \sqrt{\frac{b}{a + c}} + \sqrt{\frac{c}{a + b}} > 2$, với $a, b, c > 0$.

Bài 7.5 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho $a, b, c, d > 0$. Biết $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \leq 1$. Chứng minh $abcd \leq \frac{1}{81}$.

Bài 7.6 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho $a, b > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + 2b \geq 8$. Tìm GTNN của $P = 2a + 3b + \frac{4}{a} + \frac{9}{b}$.

Bài 7.7 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz} = 2$. Tìm GTNN của $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x}$.

Bài 7.8 (Quỳnh Mai)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Tìm GTLN của biểu thức $M = \frac{y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-4}}{xy}$.

Bài 7.9 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $A = \frac{8x+3}{4x^2+1}$;

b) $B = \frac{x}{(x+2020)^2}$.

Bài 7.10 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 6y + 3$;

b) $B = (x-2)^4 + (x+4)^4$.

Bài 7.11 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$.

Bài 7.12 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Với $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2011$.

Bài 7.13 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Với $x, y > 0$ và $x \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x+2y)^2}{xy}$.

Bài 7.14 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Với $a, b, c > 0$ và $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$.

Bài 7.15 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Với $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 2020$. Tìm GTLN của $Q = \sqrt{2020a + bc} + \sqrt{2020b + ca} + \sqrt{2020c + ab}$.

Cho các số x, y, z thỏa mãn $-2 \leq x, y, z \leq 5$ và $x + 2y + 3z \leq 2$.

Chứng minh rằng $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 66$.

Cho $2 \leq x \leq 3; 4 \leq y, z \leq 6$ và $x + y + z = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$.

Cho x, y là các số tự nhiên thỏa mãn $x + y = 33$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3}$.

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{7x+4} - \sqrt{x+1} = 3$.

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+16} = \sqrt{2x+4} + \sqrt{2x+9}$.

c) $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} = x^2 - 12x + 38$.

d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} + 2\sqrt{-x^2+10x-9} = 12$.

e) $6 + 2\sqrt{4-x^2} = 3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})$.

f) $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$.

g) $x^2 + 4x + 7 = (x+4)\sqrt{x^2+7}$.

h) $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$.

Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3(x+y) + 2xy + 9 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ 3x^2 - xy - 5y^2 = 5 \end{cases}$

Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$. Gọi A và B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) để diện tích $\triangle ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

Cho 3 số a, b, c bất kỳ. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$.

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

Cho $c > 0$ và $a, b \geq c$. Chứng minh $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

Bài 7.25 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 \leq 2$.Tìm giá trị lớn nhất của $P = a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)}$.**Bài 7.26** (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho $a, b \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}}$.**Bài 7.27** (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho các số a, b, c thay đổi thỏa mãn $1 \leq a, b, c \leq 2$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.**Bài 7.28** (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $A = \frac{8x+3}{4x^2+1}$;

b) $B = \frac{x}{(x+2020)^2}$.

Bài 7.29 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 6y + 3$;

b) $B = (x-2)^4 + (x+4)^4$.

Bài 7.30 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$. **Tương tự.** Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = \sqrt{2x+3} + \sqrt{13-2x}$.**Bài 7.31** (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Với $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2011$.**Bài 7.32** (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Với $x, y > 0$ và $x \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x+2y)^2}{xy}$.**Bài 7.33** (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Với $a, b, c > 0$ và $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$.**Bài 7.34** (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Với $a, b, c > 0$ và $a+b+c = 2020$. Tìm GTLN của $Q = \sqrt{2020a+bc} + \sqrt{2020b+ca} + \sqrt{2020c+ab}$.**Bài 7.35** (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho các số x, y, z thỏa mãn $-2 \leq x, y, z \leq 5$ và $x + 2y + 3z \leq 2$.Chứng minh rằng $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 66$.

Bài 7.36 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho $2 \leq x \leq 3; 4 \leq y, z \leq 6$ và $x + y + z = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$.

Bài 7.37 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho x, y là các số tự nhiên thỏa mãn $x + y = 33$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3}$.

Bài 7.38 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{7x+4} - \sqrt{x+1} = 3$.

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+16} = \sqrt{2x+4} + \sqrt{2x+9}$.

c) $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} = x^2 - 12x + 38$.

d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} + 2\sqrt{-x^2 + 10x - 9} = 12$.

e) $6 + 2\sqrt{4-x^2} = 3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})$.

f) $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$.

g) $x^2 + 4x + 7 = (x+4)\sqrt{x^2+7}$.

h) $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$.

Bài 7.39 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3(x+y) + 2xy + 9 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ 3x^2 - xy - 5y^2 = 5 \end{cases}$$

Bài 7.40 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$. Gọi A và B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) để diện tích $\triangle ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 7.41 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho 3 số a, b, c bất kỳ. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$.

Bài 7.42 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

Bài 7.43 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho $c > 0$ và $a, b \geq c$. Chứng minh $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

Bài 7.44 (Lương Thế Vinh)

Nhóm LaTeX Theme and Related Topics sưu tầm ☆☆☆

Cho $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)}$.

Cho $a, b \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}}$.

Cho các số a, b, c thay đổi thỏa mãn $1 \leq a, b, c \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.