

Trường THCS Trưng Vương

Năm học: 2017-2018

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP KIỂM TRA HỌC KỲ II**MÔN: TOÁN 7****A. LÝ THUYẾT:****1. Đại số:** Trả lời các câu hỏi 1,2 SGK trang 22. Câu 1,2,3,4 SGK trang 49.**2. Hình học:**

- Nêu định nghĩa, tính chất, các cách nhận biết tam giác cân, đều, vuông, vuông cân?
- Nêu các trường hợp bằng nhau của hai tam giác, trường hợp bằng nhau đặc biệt của 2 tam giác vuông.
- Phát biểu, vẽ hình, ghi giả thiết, kết luận của các định lí.
 - + Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác.
 - + Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu.
 - + Quan hệ giữa 3 cạnh trong tam giác.
 - + Tính chất tia phân giác của một góc, đường trung trực của đoạn thẳng.
 - + Tính chất đường trung tuyến, 3 đường phân giác, 3 đường trung trực, 3 đường cao trong tam giác.

B. BÀI TẬP THAM KHẢO:**Bài 1.** Thu gọn các đơn thức sau rồi chỉ ra bậc của đơn thức:

a) $5x(-2xy^2).3xyz^3$

b) $(-2x^2yz^3)^2.(3x^3y^2z)^3$

c) $(4xy^2x)^2.\left(\frac{3}{4}x^2yz\right)^3$

d) $-\frac{1}{25}x\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2.\left(\frac{5}{2}y^2\right)^2$

e) $\left(-\frac{1}{2}x^3y\right)^2.1\frac{1}{5}x^3y^3.\left(-\frac{5}{3}xy^3\right)^2$

f) $4abx^3\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^2.(-ay)^2$ (a, b là hằng số).

Bài 2. Cho các đa thức: $A = -x^2y^2 + 7x - 3x^2y + 4xy + 2yx^2 - 5x - 4$

$$B = 2xy + 3 - 6x^2y - 3xy + 2x + 1 - (xy)^2$$

$$C = 4(x-1) + 2x(xy^2 - y) + y(x^2 - x) - x(xy + 3)$$

- Thu gọn và tìm bậc của A, B, C .
- Tính $A+B+C; A+B-C; 2A-B+C$.
- Tính giá trị biểu thức C với $x=2, y=-2$.

Bài 3. Tìm đa thức A biết:

- $A + (2xy^2 - 3x^2y + y^3) = 5x^2y^2 + 4x^2y + 4y^3$.
- $A - (4xy - 3y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$.
- $(25x^2y - 13xy^2 + x^3) - A = 11x^2y - 2x^3$.
- $(3x^2y^2 - xy^2 + 2x^3y^3) - A$.

Bài 4. Cho 2 đa thức: $P(x) = -5x^5 - 6x^2 + 5x^5 - 5x - 2 + 4x^2$

$$\text{và } Q(x) = -2x^4 - 5x^3 + 10x - 17x^2 + 4x^3 - 5 + x^3$$

- Thu gọn mỗi đa thức trên rồi sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tính $P(x) + Q(x); P(x) - Q(x)$.
- Chứng tỏ $x = -2$ là nghiệm của $P(x)$ nhưng không phải là nghiệm của $Q(x)$.

Bài 5. Cho 2 đa thức: $A(x) = x^3(x+2) - 5x + 9 + 2x^3(x-1)$

$$\text{và } B(x) = 2(x^2 - 3x + 1) - (3x^4 + 2x^3 - 3x + 4)$$

- Thu gọn rồi sắp xếp theo lũy thừa tăng dần của biến.
- Tính $A(x) + B(x); A(x) - B(x)$.
- Tìm nghiệm của $C(x) = A(x) + B(x)$.
- Chứng tỏ đa thức $H(x) = A(x) + 5x$ vô nghiệm.

Bài 6. Cho hai đa thức: $A(x) = 3(x^2 + 2 - 4x) - 2x(x-2) + 17$

$$\text{và } B(x) = 3x^2 - 7x + 3 - 3(x^2 - 2x + 4).$$

a) Thu gọn $A(x), B(x)$. Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm của biến. Tìm hệ số cao nhất, hệ số tự do của 2 đa thức đó.

b) Tìm $N(x)$ sao cho $N(x) - B(x) = A(x)$.

và $M(x)$ sao cho $A(x) - M(x) = B(x)$.

c) Chứng minh: $x = 2$ là một nghiệm của $N(x)$. Tìm một nghiệm nữa của $N(x)$.

d) Tính nghiệm của $A(x)$ tại $x = \frac{2}{3}$.

Bài 7. Tìm nghiệm của các đa thức

a) $A(x) = -4x - 5$

g) $H(x) = \left| \frac{1}{2}x - 3 \right| - \frac{1}{2}$

b) $B(x) = 3(2x - 1) - 2(x + 1)$

h) $K(x) = |3x - 2| + |4 - 6x|$

c) $C(x) = (2x^2 - 8)(-x^2 + 1)$

i) $M(x) = |x - 1| + (x^2 - 1)^2$

d) $D(x) = 3x - x^3$

j) $N(x) = 4x^2 - 3x + 7$

e) $E(x) = 2x^3 + 4x$

k) $P(x) = 7x^2 - 2x - 9$

f) $G(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

l) $Q(x) = 5x^2 - 11x + 6$

Bài 8*. (Dành cho HS giỏi)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức đại số:

$A = (x + 2)^2$

$B = (x - 1)^2 + (y + 5)^2 + 1$

$C = |x - 2014| + |x - 2015|$

$D = (x^2 - 9)^4 + |y - 2| - 1$

b) Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

$B = 5 - (x + 1)^2$

$C = 9 - |x^2 - 5|$

$D = \frac{1}{x^2 + 2}$

c) Tìm các giá trị nguyên của biến x để:

1) $A = \frac{2}{6 - x}$ có giá trị lớn nhất. 2) $B = \frac{8 - x}{x - 3}$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 9*. (Dành cho HS giỏi) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \frac{2a-5b}{a-3b} - \frac{4a+b}{8a-2b}$ biết $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

b) $B = (x+y)(y+z)(x+z)$ biết $xyz = 2$ và $x+y+z = 0$

c) $f(x) = x^{17} - 2015x^{16} + 2015x^{15} - 2015x^{14} + \dots + 2015x - 1$. Tính $f(2014)$

Bài 10. Cho tam giác ABC có $AB = 3cm$, $AC = 4cm$, $BC = 5cm$.

a) Tam giác ABC là tam giác gì? Vì sao?

b) Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Gọi AD là phân giác BAH ($D \in BC$). Qua A vẽ đường thẳng song song với BC , trên đó lấy E sao cho $AE = BD$ (E và C cùng phía đối với AB). CMR: $AB = DE$.

c) CMR: $\triangle ADC$ cân.

d) Gọi M là trung điểm AD , I là giao điểm của AH và DE . CMR: C, I, M thẳng hàng.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A , phân giác BD , kẻ DE vuông góc với BC tại E . Trên tia đối của tia AB lấy F sao cho $AF = CE$. CMR:

a) $\triangle ABD = \triangle EBD$

b) BD là đường trung trực của AE .

c) $AD < DC$.

d) E, D, F thẳng hàng và $BD \perp CF$.

e) $2(AD + AF) > CF$.

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ và $AC > AB$. Kẻ $AH \perp BC$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Kẻ $CE \perp AD$ kéo dài (E thuộc tia AD). Chứng minh:

a) $\triangle ABD$ cân.

b) $\angle DAH = \angle ACB$

c) CB là tia phân giác của $\angle ACE$

d) Kẻ $DI \perp AC$ ($I \in AC$), chứng minh 3 đường thẳng AH, DI, CE đồng quy.

e) So sánh AC và CD .

f) Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để I là trung điểm AC .

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($A > 90^\circ$). Trên cạnh BC lấy 2 điểm D, E sao cho $BD = DE = EC$. Kẻ $BH \perp AD$, $CK \perp AE$ ($H \in AD, K \in AE$), BH cắt CK tại G .

Chứng minh rằng:

- a) $\triangle ADE$ cân.
- b) $BH = CK$.
- c) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh A, M, G thẳng hàng.
- d) $AC > AD$.
- e) $DAE > DAB$.

Bài 14. Cho $\triangle ABC$ đều. Tia phân giác góc B cắt AC tại M . Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BM, BC tại N, E . Chứng minh:

- a) $\triangle ANC$ cân.
- b) $NC \perp BC$.
- c) Xác định dạng của tam giác $\triangle BNE$.
- d) NC là trung trực của BE .
- e) Cho $AB = 10\text{cm}$. Tính diện tích $\triangle BNE$ và chu vi $\triangle ABE$.

Bài 15. Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ ($AB < AC$), đường cao AH , AD là phân giác của $\triangle AHC$. Kẻ $DE \perp AC$.

- a) Chứng minh: $DH = DE$.
- b) Gọi K là giao điểm của DE và AH . Chứng minh $\triangle AKC$ cân.
- c) Chứng minh $\triangle KHE = \triangle CEH$.
- d) Cho $BH = 8\text{cm}, CH = 32\text{cm}$. Tính AC .
- e) Giả sử $\triangle ABC$ có $C = 30^\circ$, AD cắt CK tại P . Chứng minh $\triangle HEP$ đều.

Bài 16. Cho $\triangle ABC$ có $A = 60^\circ$. Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau ở I , cắt cạnh AC, AB ở D và E . Tia phân giác góc BIC cắt BC ở F .

- a) Tính góc BIC
- b) Chứng minh: $ID = IE = IF$.
- c) Chứng minh: $\triangle DEF$ đều.
- d) Chứng minh: I là giao điểm các đường phân giác của hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$

*Hướng dẫn giải:***Bài 1.**

- a) $5x(-2xy^2).3xyz^3 = -30x^3y^3z^3$; Bậc 9
- b) $(-2x^2yz^3)^2.(3x^3y^2z)^3 = 12x^{13}y^8z^9$; Bậc 30
- c) $(4xy^2x)^2.\left(\frac{3}{4}x^2yz\right)^3 = \frac{27}{4}x^{10}y^7z^3$; Bậc 20
- d) $-\frac{1}{25}x\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2.\left(\frac{5}{2}y^2\right)^2 = \frac{-1}{36}x^5.y^6$; Bậc 11
- e) $\left(-\frac{1}{2}x^3y\right)^2.1\frac{1}{5}x^3y^3.\left(-\frac{5}{3}xy^3\right)^2 = \frac{5}{6}x^{11}y^{11}$; Bậc 11
- f) $4abx^3\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^2.(-ay)^2 = a^3b.x^5.y^6$; Bậc 11

Bài 2.

- a) Thu gọn và tìm bậc:
- $A = -x^2y^2 - x^2y + 4xy + 2x - 4$; Bậc 4
- $B = -x^2y^2 - 6x^2y - xy + 2x + 4$; Bậc 4
- $C = 2x^2y^2 - 3xy + x - 4$; Bậc 4
- b) Tính:
- $A + B + C = -7x^2y + 5x - 4$
- $A + B - C = -4x^2y^2 - 7x^2y + 6xy + 3x + 4$
- $2A - B + C = x^2y^2 + 4x^2y + 6xy + 3x - 16$
- c) Tính giá trị biểu thức C với $x = 2, y = -2$
- $C = 2.2^2.(-2)^2 - 3.2.(-2) + 2 - 4 = 42$

Bài 3. Tìm A

- a) $A + (2xy^2 - 3x^2y + y^3) = 5x^2y^2 + 4x^2y + 4y^3$
- $\Leftrightarrow A = 5x^2y^2 + 4x^2y + 4y^3 - (2xy^2 - 3x^2y + y^3)$
- $\Leftrightarrow A = 5x^2y^2 + 4x^2y + 4y^3 - 2xy^2 + 3x^2y - y^3$
- $\Leftrightarrow A = 5x^2y^2 + 7x^2y + 3y^3 - 2xy^2$
- b) $A - (4xy - 3y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

$$\Leftrightarrow A = x^2 - 7xy + 8y^2 + 4xy - 3y^2$$

$$\Leftrightarrow A = x^2 - 3xy + 5y^2$$

$$(25x^2y - 13xy^2 + x^3) - A = 11x^2y - 2x^3$$

$$c) A = (25x^2y - 13xy^2 + x^3) - (11x^2y - 2x^3)$$

$$\Leftrightarrow A = 25x^2y - 13xy^2 + x^3 - 11x^2y + 2x^3$$

$$\Leftrightarrow A = 14x^2y - 13xy^2 + 3x^3$$

$$d) (3x^2y^2 - xy^2 + 2x^3y^3) - A = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 3x^2y^2 - xy^2 + 2x^3y^3$$

Bài 4.

a) Thu gọn mỗi đa thức trên rồi sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$\begin{aligned} P(x) &= -5x^5 - 6x^2 + 5x^5 - 5x - 2 + 4x^2 \\ &= (-5x^5 + 5x^5) + (-6x^2 + 4x^2) - 5x - 2 = -2x^2 - 5x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= -2x^4 - 5x^3 + 10x - 17x^2 + 4x^3 - 5 + x^3 = -2x^4 + (-5x^3 + 4x^3 + x^3) - 17x^2 + 10x - 5 \\ &= -2x^4 - 17x^2 + 10x - 5 \end{aligned}$$

b) Tính $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$

$$+) P(x) + Q(x) = -2x^2 - 5x - 2 - 2x^4 - 17x^2 + 10x - 5$$

$$P(x) + Q(x) = -2x^4 + (-2x^2 - 17x^2) + (-5x + 10x) + (-2 - 5)$$

$$P(x) + Q(x) = -2x^4 - 19x^2 + 5x - 7$$

$$+) P(x) - Q(x) = -2x^2 - 5x - 2 - (-2x^4 - 17x^2 + 10x - 5)$$

$$P(x) - Q(x) = -2x^2 - 5x - 2 + 2x^4 + 17x^2 - 10x + 5$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^4 + (-2x^2 + 17x^2) + (-5x - 10x) + (-2 + 5)$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^4 + 15x^2 - 15x + 3$$

c) Chứng tỏ $x = -2$ là nghiệm của $P(x)$ nhưng không phải là nghiệm của $Q(x)$

+) Thay $x = -2$ vào $P(x)$, ta có: $P(x) = -2x^2 - 5x - 2$

$$\text{Suy ra } P(-2) = -2(-2)^2 - 5(-2) - 2 \Leftrightarrow P(-2) = -8 + 10 - 2 \Leftrightarrow P(-2) = 0$$

Hay $x = -2$ là nghiệm của $P(x)$.

+) Thay $x = -2$ vào $Q(x)$, ta có: $Q(x) = -2x^4 - 17x^2 + 10x - 5$

$$\text{Suy ra } Q(-2) = -2(-2)^4 - 17(-2)^2 + 10(-2) - 5 \Leftrightarrow Q(-2) = -32 + 68 - 20 - 5$$

$$\Leftrightarrow Q(-2) = -11 \neq 0$$

Hay $x = -2$ không phải là nghiệm của $Q(x)$.

Vậy $x = -2$ là nghiệm của $P(x)$ nhưng không phải là nghiệm của $Q(x)$.

Bài 5.

a) Thu gọn và sắp xếp theo lũy thừa giảm

$$A(x) = x^3(x + 2) - 5x + 9 + 2x^3(x - 1)$$

$$= x^4 + 2x^3 - 5x + 9 + 2x^4 - 2x^3$$

$$= 3x^4 - 5x + 9$$

$$B(x) = 2(x^2 - 3x + 1) - (3x^4 + 2x^2 - 3x + 4)$$

$$= 2x^2 - 6x + 2 - 3x^4 - 2x^2 + 3x - 4$$

$$= -3x^4 - 3x - 2$$

b) Tính $A(x) + B(x)$; $A(x) - B(x)$

$$\begin{array}{r} A(x) = 3x^4 - 5x + 9 \\ + \end{array}$$

$$B(x) = -3x^4 - 3x - 2$$

$$A(x) + B(x) = -8x + 7$$

$$A(x) = 3x^4 - 5x + 9$$

$$B(x) = -3x^4 - 3x - 2$$

$$A(x) - B(x) = 6x^4 - 2x + 11$$

c) Tìm nghiệm của $C(x) = A(x) + B(x)$

$$C(x) = -8x + 7 = 0 \Leftrightarrow -8x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}$$

Vậy nghiệm của $C(x) = -8x + 7$ là $x = \frac{7}{8}$

d) Chứng tỏ rằng $H(x) = A(x) + 5x$ vô nghiệm

$$H(x) = 3x^4 - 5x + 9 + 5x = 3x^4 + 9$$

$$H(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 = -9 \Leftrightarrow x^4 = -3 \text{ (vô lí)}$$

Nên không có giá trị nào của x để $H(x) = 0$

Vậy $H(x)$ vô nghiệm.

Bài 6.

a) Thu gọn và sắp xếp

$$A(x) = 3(x^2 + 2 - 4x) - 2x(x - 2) + 17$$

$$= 3x^2 + 6 - 12x - 2x^2 + 4x + 17$$

$$= x^2 - 8x + 23$$

Hệ số cao nhất: 1, hệ số tự do 23

$$B(x) = 3x^2 - 7x + 3 - 3(x^2 - 2x + 4)$$

$$= 3x^2 - 7x + 3 - 3x^2 + 6x - 12$$

$$= -x - 9$$

Hệ số cao nhất: -1, hệ số tự do -9

$$b) N(x) - B(x) = A(x)$$

$$\Leftrightarrow N(x) = B(x) + A(x)$$

$$+ \quad A(x) = x^2 - 8x + 23$$

+

$$B(x) = \quad - x - 9$$

$$N(x) = x^2 - 9x + 14$$

$$A(x) - M(x) = B(x)$$

$$\Leftrightarrow M(x) = A(x) - B(x)$$

$$- \quad A(x) = x^2 - 8x + 23$$

-

$$B(x) = \quad - x - 9$$

$$M(x) = x^2 - 7x + 32$$

c) Chứng minh 2 là nghiệm của $N(x)$. Tìm một nghiệm nữa của $N(x)$

$$N(2) = 2^2 - 9 \cdot 2 + 14 = 4 - 18 + 14 = 0$$

Vậy 2 là nghiệm của $N(x)$

$$N(x) = x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x + a)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = x^2 + (a - 2)x - 2a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9 = a - 2 \\ 14 = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ a = -7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $a = -7$ là một nghiệm nữa của $N(x)$

d) Tính giá trị của $A(x)$ tại $x = \frac{2}{3}$

Thay $x = \frac{2}{3}$ vào biểu thức $A(x) = x^2 - 8x + 23$

$$\text{Ta được } A\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{2}{3} + 23 = \frac{4}{9} - \frac{16}{3} + 23 = \frac{163}{9}$$

Vậy tại $x = \frac{2}{3}$ thì giá trị của biểu thức $A(x)$ bằng $\frac{163}{9}$

Bài 7.

a) Ta có $-4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$.

Vậy nghiệm của đa thức là $x = -\frac{5}{4}$.

b) Ta có $3(2x - 1) - 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$.

Vậy nghiệm của đa thức là $x = \frac{5}{4}$.

c) Ta có $(2x^2 - 8)(-x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8 = 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của đa thức là $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

d) Ta có $3x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của đa thức là $S = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$.

e) Ta có $2x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -2 \end{cases}$.

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi x nên $x^2 = -2$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của đa thức là $x = 0$.

f) Ta có $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 1) = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 = -1 \end{cases}$.

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi x nên $x^2 = -1$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của đa thức là $x = 1$.

g) Ta có: $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}x - 3\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x - 3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 5 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của đa thức là $S = \{5; 7\}$.

h) Ta có $|3x - 2| + |4 - 6x| = 0$.

$$\text{Vì } \begin{cases} |3x-2| \geq 0 \\ |4-6x| \geq 0 \end{cases} \text{ nên } |3x-2| + |4-6x| \geq 0.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} |3x-2| = 0 \\ |4-6x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \\ 4-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x = \frac{2}{3}$.

$$\text{i) Ta có } |x-1| + (x^2-1)^2 = 0.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} |x-1| \geq 0 \\ (x^2-1)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ nên } |x-1| + (x^2-1)^2 \geq 0.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} |x-1| = 0 \\ (x^2-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy nghiệm của đa thức là $x=1$.

$$\text{j) Ta có: } 4x^2 - 3x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + \frac{103}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(2x - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(2x - \frac{3}{4}\right) + \frac{103}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{4}\right)\left(2x - \frac{3}{4}\right) + \frac{103}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-103}{16}.$$

$$\text{Vì } \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \text{ nên suy ra } \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-103}{16} \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{k) Ta có } 7x^2 - 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 7x - 9x - 9 = 0 \Leftrightarrow 7x(x+1) - 9(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(7x-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 7x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{9}{7} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của đa thức là } S = \left\{-1; \frac{9}{7}\right\}$$

$$1) \text{ Ta có } 5x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 5x - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow 5x(x-1) - 6(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của đa thức là $S = \{1; 6\}$.

Bài 8.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức đại số:

$$+) A = (x+2)^2$$

Vì $(x+2)^2 \geq 0, \forall x$; dấu "=" xảy ra khi $(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Vậy GTNN của A là 0 khi $x=-2$

$$+) B = (x-1)^2 + (y+5)^2 + 1$$

Ta có: $(x-1)^2 \geq 0$ với mọi x, $(y+5)^2 \geq 0$ với mọi y

$$\text{Suy ra: } (x-1)^2 + (y+5)^2 + 1 \geq 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (y+5)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$$

Vậy GTNN của B là 1 khi $x=1; y=-5$

$$+) C = |x-2014| + |x-2015|$$

$$\text{Ta có: } C = |x-2014| + |x-2015| = |x-2014| + |2015-x|$$

$$\text{Mà: } |x-2014| + |2015-x| \geq |x-2014+2015-x| = |1| = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } (x-2014)(2015-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2014 \leq x \leq 2015$$

Vậy GTNN của C là 1 khi $2014 \leq x \leq 2015$

$$+) E = (x^2-9)^4 + |y-2| - 1$$

$$\text{Vì: } (x^2-9)^4 \geq 0; |y-2| \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Suy ra: } D = (x^2-9)^4 + |y-2| - 1 \geq 0 + 0 - 1 = -1$$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} (x^2 - 9)^4 = 0 \\ |y - 2| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy GTNN của D là -1 khi $(x; y) = (3; 2)$ hoặc $(x; y) = (-3; 2)$

b) Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

+) $B = 5 - (x + 1)^2$

Vì: $(x + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow B = 5 - (x + 1)^2 \leq 5$ với mọi x , dấu “=” xảy ra khi:

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy GTLN của B là 5 khi $x = -1$

+) $C = 9 - |x^2 - 5|$

Vì: $|x^2 - 5| \geq 0 \forall x \Leftrightarrow C = 9 - |x^2 - 5| \leq 9 - 0 = 9$ với mọi x

Dấu “=” xảy ra khi: $|x^2 - 5| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Vậy GTLN của C là 9 khi $x = \pm\sqrt{5}$

+) $D = \frac{1}{x^2 + 2}$

Vì $x^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow D = \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$ với mọi x

Dấu “=” xảy ra khi: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy GTLN của D là $\frac{1}{2}$ khi $x = 0$

c) Tìm các giá trị nguyên của biến x để:

1) $A = \frac{2}{6 - x}$ có giá trị lớn nhất

ĐK để A có nghĩa là $x \neq 6$

Với $x > 6 \Rightarrow 6 - x < 0 \Rightarrow A = \frac{2}{6 - x} < 0$

Với $x < 6 \Rightarrow 6 - x > 0 \Rightarrow A = \frac{2}{6-x} > 0$

Do đó để A lớn nhất thì $A > 0$ trong trường hợp $x < 6$

Mặt khác tử số của A không đổi nên A lớn nhất khi mẫu $6 - x$ bé nhất

Suy ra x là số nguyên lớn nhất mà $x < 6$ nên $x = 5$

Khi đó $A = \frac{2}{6-x} = \frac{2}{6-5} = 2$

Vậy khi $x = 5$ thì A đạt GTLN là 2

2) $B = \frac{8-x}{x-3}$ có giá trị nhỏ nhất

ĐK để B có nghĩa là $x \neq 3$

Ta có: $B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$;

Suy ra B nhỏ nhất khi $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất

Với $x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow \frac{5}{x-3} > 0$

Với $x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow \frac{5}{x-3} < 0$

Do đó để $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất thì $\frac{5}{x-3} < 0$ trong trường hợp $x < 3$

Mặt khác tử số của $\frac{5}{x-3}$ không đổi nên $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất khi mẫu $x - 3$ lớn nhất

Suy ra x là số nguyên lớn nhất mà $x < 3$ nên $x = 2$

Khi đó $B = \frac{5}{x-3} - 1 = \frac{5}{2-3} - 1 = -6$

Vậy khi $x = 2$ thì B đạt GTNN là -6 .

Bài 9*. (Dành cho HS giỏi)

a) Ta có $\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4}$. Đặt $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = k$. Suy ra $a = 3k; b = 4k$

Khi đó biểu thức A trở thành:

$$A = \frac{2.3k - 5.4k}{3k - 3.4k} - \frac{4.3k + 4k}{8.3k - 2.4k} = \frac{6k - 20k}{3k - 12k} - \frac{12k + 4k}{24k - 8k} = \frac{-14k}{-9k} - \frac{16k}{16k} = \frac{14}{9} - 1 = 1\frac{5}{9} - 1 = \frac{5}{9}$$

Vậy $A = \frac{5}{9}$.

b) Ta có $x + y + z = 0$, suy ra $x + y = -z$; $y + z = -x$ và $x + z = -y$

Thay vào biểu thức B, ta được:

$$B = (-z)(-x)(-y) = -xyz, \text{ mà } xyz = 2 \text{ nên } B = -2$$

Vậy $B = -2$.

c) Xét với $x = 2014 \Rightarrow x + 1 = 2015$. Khi đó ta được

$$f(2014) = x^{17} - (x+1)x^{16} + (x+1)x^{15} - (x+1)x^{14} + \dots + (x+1)x - 1$$

$$= x^{17} - (x^{17} + x^{16}) + (x^{16} + x^{15}) - (x^{15} + x^{14}) + \dots + (x^2 + x) - 1$$

$$= x^{17} - x^{17} - x^{16} + x^{16} + x^{15} - x^{15} - x^{14} + \dots + x^2 + x - 1$$

$$= x - 1 = 2014 - 1 = 2013$$

Vậy $f(2014) = 2013$

Bài 10.

a) Do $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A.

b) Do $\triangle EAD = \triangle BDA$ (cgc) nên $ED = AB$.

c) $\triangle AHD$: $\angle ADH = 180^\circ - (\angle HAD + \angle AHD) = 90^\circ - \angle HAD$

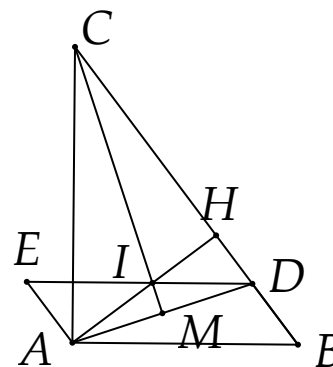
$$\angle CAD = 90^\circ - \angle DAB$$

Mà AD là phân giác $\angle BAH$

$$\text{Nên } \angle HAD = \angle DAB \rightarrow \angle CAD = \angle ADH$$

Vậy $\triangle ADC$ cân tại C.

d) $\triangle ADC$ cân tại C, M là trung điểm AD nên $CM \perp AD$.



Do $\triangle EAD = \triangle BDA$ (cgc) (c/m ở b)

nên $\angle EDA = \angle DAB \rightarrow ED \parallel AB$

Mà $AB \perp AC \rightarrow DE \perp CA \rightarrow I = AH \cap DE$

Do đó I là trực tâm $\triangle ADC \rightarrow I \in CM$

Vậy C, I, M thẳng hàng.

Bài 11.

a) Vì BD là phân giác $\angle ABC$

Suy ra $\angle ABD = \angle DBE$

Do đó $\triangle ABD = \triangle EBD$ (góc nhọn – cạnh huyền).

b) Ta có: $\triangle ABK \cong \triangle EBK$ (c-g-c)

nên $BD \perp AE$ tại K và K là trung điểm AE.

Vậy BD là đường trung trực của AE.

c) Ta có: $\triangle ABD = \triangle EBD$ nên $AD = DE$

mà $\triangle EDC$ vuông tại E nên $DE < DC \rightarrow AD < DC$.

d) Ta có: $\triangle FAD = \triangle CED$ (c-g-c)

Suy ra: $\angle FAD = \angle CED$ do đó $\angle FAD + \angle ADE = \angle ADE + \angle EDC$

Mà A, D, C thẳng hàng nên E, D, F thẳng hàng.

Trong $\triangle BEC$: $CA \perp BE$, $FE \perp BC$, $CA \cap FE = D$ nên D là trực tâm $\triangle BEC \rightarrow BD \perp CF$.

e) Ta có: $\triangle FAD$: $AF + AD > FD$ và $\triangle ECD$: $DE + EC > DC$

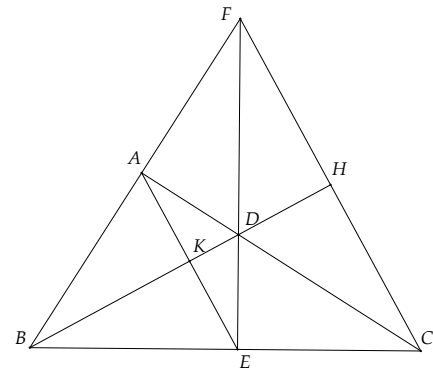
Mà $AF = CE$, $AD = DE$

Suy ra $(AF + AD) + (DE + EC) > FD + DC$

Hay $2(AD + AF) > FD + DC$

Xét $\triangle DFC$: $DF + DC > FC$

Do đó $2(AD + AF) > FC$.



Bài 12.

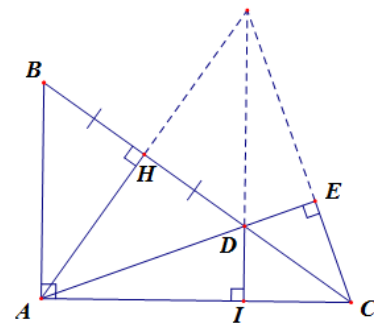
a) Ta có:

+ $AH \perp BC \Rightarrow AH$ là đường cao của $\triangle ABD$ + $HD = HB \Rightarrow AH$ là trung tuyến của $\triangle ABD$ $\Rightarrow \triangle ABD$ có AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ABD$ cân tại A .b) + $\triangle ABD$ cân tại A nên: $ADH = ABH$ (1)+ $\triangle ADH$ vuông tại H nên: $DAH + ADH = 90^\circ$ (2)+ $\triangle ABC$ vuông tại A nên: $ACB + ABH = 90^\circ$ (3)Từ (1), (2), (3) suy ra: $DAH = ACB$ (đpcm).

c) Ta có:

+ $\triangle DCE$ vuông tại E nên:

$$DCE + CDE = 90^\circ \quad (4)$$

+ Mà: $CDE = ADH$ (đối đỉnh) (5)Từ (2), (4), (5) suy ra: $DCE = ACB$ $\Rightarrow CB$ là tia phân giác của $\angle ACE$ d) Ta có: + $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp DC$ + $ID \perp AC$ + $CE \perp AD$ $\Rightarrow AH, ID, CE$ là 3 đường cao của $\triangle ADC$ nên đồng quy tại một điểm.e) Vì $AH \perp BC$ nên HB, HC lần lượt là hình chiếu của AB, AC trên BC Mà: $AC > AB$ (gt) $\Rightarrow HC > HB$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu)Mà: $HD = HB$ (điểm D tia HC)Nên: điểm D thuộc đoạn thẳng HC Do đó: $CD < CH$ Lại có: $CH < AC$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)Vậy: $CD < AC$.f) Nếu I là trung điểm của AC thì: DI là đường trung tuyến của $\triangle ADC$ Mà: $DI \perp AC$ 

$\Rightarrow \triangle ADC$ có DI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $\triangle ADC$ cân tại D

$\Rightarrow DAC = DCA$

Lại có: $ADB = 2DCA$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Mà: $ADB = ABC$ (vì $\triangle ABD$ cân tại A)

Do đó: $ABC = 2DCA$

Mà: $ABC + DCA = 90^\circ$ Suy ra: $ABC = 60^\circ$; $DCA = 30^\circ$

Vậy $\triangle ABC$ có thêm điều kiện $ABC = 60^\circ$ (hoặc $ACB = 30^\circ$) thì I là trung điểm AC .

Bài 13.

a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

+ $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân)

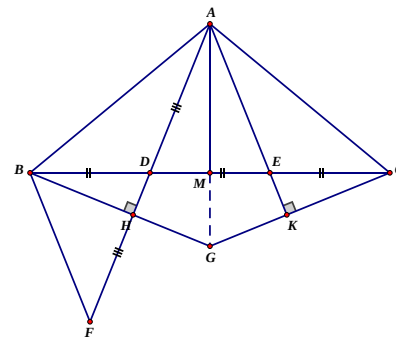
+ $ABC = ACE$ ($\triangle ABC$ cân)

+ $BD = CE$ (Giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AD = AE$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân (đpcm).



b) Vì $\triangle ABD = \triangle ACE$ (cmt) $\Rightarrow BAH = CAK$ (2 góc tương ứng)

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACK$ có:

$$\left. \begin{array}{l} + AHB = AKC (=90^\circ) \\ + AB = AC (\triangle ABC \text{ cân}) \\ + BAH = CAK (\text{cmt}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACK \text{ (ch-gn)} \\ \Rightarrow BH = CK \text{ (2 cạnh tương ứng)} \end{array}$$

c) Xét $\triangle DBH$ và $\triangle ECK$ có:

$$\left. \begin{array}{l} + DHB = EKC (=90^\circ) \\ + BD = CE (\text{gt}) \\ + BH = CK (\text{cmt}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \triangle DBH = \triangle ECK \text{ (ch-cgv)} \\ \Rightarrow DBH = ECK \text{ (2 góc tương ứng)} \end{array}$$

$\Rightarrow \triangle GBC$ cân tại G , lại có GM là trung tuyến

$\Rightarrow GM$ là đường trung trực

$\Rightarrow G \in$ đường trung trực của BC (1)

Vì $\triangle ABC$ cân tại A (gt) $\Rightarrow A \in$ đường trung trực của BC (2)

Do M là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow M \in$ đường trung trực của BC (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow A, M, G$ thẳng hàng.

d) Xét $\triangle AME$ có: $\angle AEC = \angle AME + \angle MAE = 90^\circ + \angle MAE > 90^\circ \Rightarrow \angle AEC$ là góc tù.

Xét $\triangle ACE$ có: $\angle AC$ đối diện góc tù $\angle AEC \Rightarrow AC > AE$ (quan hệ góc và cạnh đối diện)

Mà $AD = AE$ (cmt) $\Rightarrow AC > AD$ (đpcm)

e) Trên tia đối của tia DA lấy điểm F sao cho $DF = DA$.

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle FDB$ có:

$$\left. \begin{array}{l} + DE = DB \text{ (gt)} \\ + \angle ADE = \angle FDB \text{ (2 góc đối đỉnh)} \\ + DA = DF \text{ (cách vẽ)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle ADE = \angle FDB \text{ (c.g.c)} \\ + AE = BF \text{ (2 cạnh tương ứng)} \\ + \angle DAE = \angle DFB \text{ (2 góc tương ứng)} \end{array} \right.$$

Xét $\triangle ABD$ có: $\angle ADB > \angle ACE = \angle ABD$ (t/c góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow AB > AD$ (quan hệ góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Mà $AD = BF$ ($= AE$) nên $\Rightarrow AB > BF$.

Xét $\triangle ABF$ có: $AB > BF$ (cmt)

$\Rightarrow \angle AFB > \angle DAB$ (quan hệ góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Lại có $\angle AFB = \angle DAE$ (cmt) $\Rightarrow \angle DAE > \angle DAB$ (đpcm).

Bài 14.

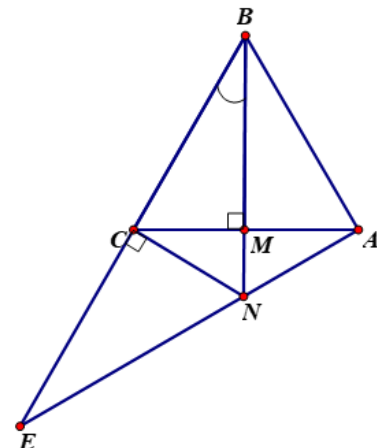
a) $\triangle ABC$ đều (giả thiết)

Mà BM là phân giác của $\triangle ABC$ (giả thiết)

$\Rightarrow BM$ là đường trung trực của $\triangle ABC$

$\Rightarrow CM = MA; BM \perp AC$ (tính chất đường trung trực)

Trong $\triangle CNA$ có: $\begin{cases} CM = MA \\ NM \perp AC \text{ (} BM \perp AC \text{)} \end{cases}$



Suy ra $\triangle CNA$ cân tại N (đpcm)

$\Rightarrow ACN = NAC$ (tính chất tam giác cân)

b) Ta có:
$$\begin{cases} BCA = BAC(gt) \\ ACN = NAC(cmt) \end{cases}$$

$\Rightarrow BCA + ACN = BAC + NAC \Leftrightarrow BCN = BAN$

Do $BAN = 90^\circ (gt) \Rightarrow BCN = 90^\circ \Rightarrow NC \perp BC$.

c) Xét $\triangle BCN$ và $\triangle BAN$ có:

$BCN = BAN = 90^\circ$

BN chung

$BC = BA(gt)$

$\Rightarrow \triangle BCN = \triangle BAN$ (Cạnh huyền – Cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BNC = BNA$ (Góc tương ứng bằng nhau)

Trong $\triangle BCN$ có: $BCN = 90^\circ (cmt) \Rightarrow BNC + CBN = 90^\circ$

Mà: $CBN = NBA = \frac{1}{2}CBA = \frac{1}{2}.60^\circ = 30^\circ (gt)$

$\Rightarrow CNB = 90^\circ - CBN = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow CNB = BNA = 60^\circ$

Ta có: $CNB + BNA + CNE = 180^\circ$

$\Rightarrow CNE = 180^\circ - CNB - BNA = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow CNE = CNB = 60^\circ$.

$\Rightarrow NC$ là tia phân giác của BNE

Mà $NC \perp BC$

$\Rightarrow \triangle BNE$ cân tại N .

d) Ta có: $\triangle BNE$ cân tại N

mà $NC \perp BC$ hay NC là đường cao của $\triangle BNE$

$\Rightarrow NC$ là đường trung trực của $\triangle BNE$ (t/c tam giác cân)

$\Rightarrow NC$ là đường trung trực của BE

e) Ta có : $BAE = 90^0$

$$AE^2 = BE^2 + AB^2$$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{BE^2 + AB^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5}$$

Ta lại có : $BC = CE = 10cm \Rightarrow BE = 20cm$

Chu vi tam giác ABE là : $AB + BE + EA = 10 + 20 + 10\sqrt{5} = 30 + 10\sqrt{5}$

Đặt $NA = x; NE = y \Rightarrow NB = y$

Ta có : $NA + NE = AE \Leftrightarrow x + y = 10\sqrt{5}$

$$\text{Mà : } BN^2 = NA^2 + AB^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 10$$

Suy ra $\begin{cases} y = 6\sqrt{5} \\ x = 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} NE = 6\sqrt{5} \\ NA = 2\sqrt{5} \end{cases}.$

Ta có: $S_{BNE} = \frac{1}{2}.NC.BE.10 = 20\sqrt{5}(cm^2).$

$$= \frac{1}{2} NA.2.BC = NA.BC = 2\sqrt{5}$$

Bài 15.

a) Chứng minh: $DH = DE$.

Cách 1:

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AED$, có:

$$AHD = AED = 90^0$$

AD là cạnh huyền chung

$$HAD = EAD \text{ (} AD \text{ là phân giác } HAC \text{)}$$

Do đó $\triangle AHD = \triangle AED$ (Cạnh huyền – góc nhọn)^A

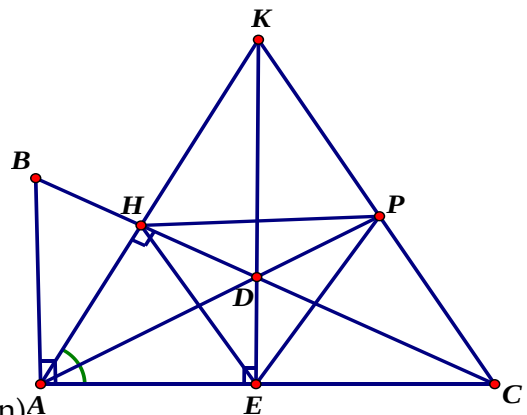
$$\Rightarrow DH = DE \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} DH \perp AH \\ DE \perp AE \end{cases}$

Mà D thuộc đường phân giác HAE

$\Rightarrow DH = DE$ (Tính chất của điểm thuộc tia phân giác).



b) Chứng minh $\triangle AKC$ cân.

Do D là giao điểm của hai đường cao KE và CH nên D là trực tâm của $\triangle AKC$
 $\Rightarrow AD \perp CK$

Xét $\triangle AKC$ có AD là đường cao đồng thời là đường phân giác

Do đó: $\triangle AKC$ cân tại A .

c) Chứng minh $\triangle KHE = \triangle CEH$.

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle AHC$ có:

$AK = AC$ (Do $\triangle AKC$ cân)

$\angle A$ chung

Do đó: $\triangle AEK = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow \angle HKE = \angle ECH$ (2 góc tương ứng)

và $KE = HC$ (2 cạnh tương ứng).

Lại có:

+) $AH = AE$ (Do $\triangle AHD = \triangle AED$)

+) $AK = AC$ (Do $\triangle AKC$ cân)

+) $AC = AE + EC$

+) $AK = AH + HK$

Suy ra $HK = EC$

Xét $\triangle KHE$ và $\triangle CEH$ có:

$HK = EC$ (Chứng minh trên)

$\angle HKE = \angle ECH$ (Chứng minh trên)

$KE = HC$ (Chứng minh trên)

Do đó: $\triangle KHE = \triangle CEH$ (c - g - c)

d) Tính AC .

Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle ABC$ vuông tại A có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (1)

Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle AHB$ vuông tại H có: $AB^2 = AH^2 + BH^2$ (2)

Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle AHC$ vuông tại H có: $AC^2 = AH^2 + CH^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2 \Rightarrow AH^2 = \frac{BC^2 - BH^2 - CH^2}{2} = \frac{50^2 - 18^2 - 32^2}{2} = 576 \Rightarrow AH = 24$$

Thay vào (3), ta tính được $AC = 30cm$.

e) Chứng minh $\triangle HEP$ đều

Khi $BCA = 30^\circ \Rightarrow KAC = 60^\circ$

Xét $\triangle AKC$ cân tại A, có $KAC = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle AKC$ đều

Do đó $AK = AC = KC$ (4)

Lại có: AD, KE, AP là các đường cao đồng thời là trung tuyến

$\Rightarrow E, H, P$ lần lượt là trung điểm của AC, AK, CK .

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , trung tuyến HE ứng với cạnh huyền AC .

Suy ra $HE = \frac{1}{2}AC$ (5) (Tính chất trung tuyến trong tam giác vuông)

Tương tự ta có: $HP = \frac{1}{2}AK$ (6) và $EP = \frac{1}{2}CK$ (7)

Từ (4), (5), (6), (7) suy ra: $HE = HP = EP$

Vậy $\triangle HEP$ đều (Điều phải chứng minh).

Bài 16.

a) Xét $\triangle ABC$ có:

$$ABC + ACB + BAC = 180^\circ$$

$$ABC + ACB + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow ABC + ACB = 120^\circ$$

Ta có: CI là tia phân giác của góc ACB

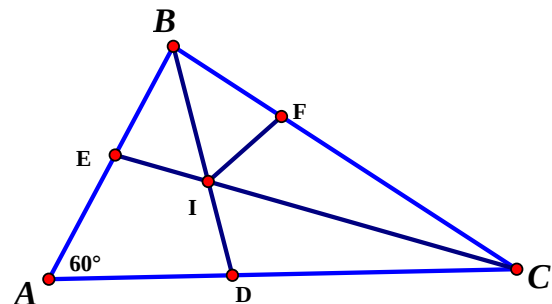
$$\Rightarrow BCI = ACI = \frac{1}{2}ACB$$

BI là tia phân giác của góc ABC

$$\Rightarrow CBI = ABI = \frac{1}{2}ABC$$

$$\Rightarrow BCI + CBI = \frac{1}{2}ACB + \frac{1}{2}ABC = \frac{1}{2}(ACB + ABC) = \frac{1}{2}.120^\circ = 60^\circ$$

Xét $\triangle BIC$ có:



$$\text{BIC} + \text{CBI} + \text{BIC} = 180^\circ$$

$$60^\circ + \text{BIC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \text{BIC} = 120^\circ$$

b) Ta có: $\text{EIB} + \text{BIC} = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow \text{EIB} + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \text{EIB} = 60^\circ.$$

Ta có: $\text{DIC} + \text{BIC} = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow \text{DIC} + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \text{DIC} = 60^\circ.$$

Ta có: IF là tia phân giác của $\text{BIC} \Rightarrow \text{BIF} = \text{FIC} = 60^\circ$.

Xét $\triangle IFC$ và $\triangle IDC$ có:

$$\text{ICF} = \text{ICD} \text{ (vì } CI \text{ là phân giác của } \text{BCA} \text{)}.$$

Cạnh CI chung

$$\text{CIF} = \text{CID} (= 60^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle IFC = \triangle IDC \text{ (g-c-g)}$$

$$\Rightarrow IF = ID \text{ (1)}$$

Xét $\triangle IFB$ và $\triangle IEB$ có:

$$\text{IBF} = \text{IBE} \text{ (vì } BI \text{ là phân giác của } \text{CBA} \text{)}$$

Cạnh IB chung

$$\text{BIF} = \text{BIE} (= 60^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle IFB = \triangle IEB \text{ (g-c-g)}$$

$$\Rightarrow IF = IE \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IF = IE = ID$.

c) Ta có: $\angle{EIF} = \angle{EIB} + \angle{FIB} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$$\angle{DIF} = \angle{DIC} + \angle{FIC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

Xét $\triangle{EIF}$ và $\triangle{DIF}$ có

IF là cạnh chung

$$\angle{EIF} = \angle{DIF} (=120^\circ)$$

$$IE = ID \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle{EIF} = \triangle{DIF} \text{ (c-g-c)} \Rightarrow EF = DF \text{ (3)}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \triangle{EIF} = \triangle{EID} \Rightarrow EF = ED \text{ (4)}$$

TỪ (3) VÀ (4) ta có: $EF = DE = DF$.

$\Rightarrow \triangle{DEF}$ là tam giác đều

$$\text{d) } \triangle{EIF} = \triangle{DIF} \Rightarrow \angle{IFE} = \angle{IFD} \Rightarrow FI \text{ là phân giác của } \angle{EFD}$$

$$\triangle{EIF} = \triangle{EID} \Rightarrow \angle{IEF} = \angle{IED} \Rightarrow EI \text{ là phân giác của } \angle{FED}$$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của 3 đường phân giác trong tam giác DEF .

Tam giác ABC có: CI là phân giác của $\angle{ACB}$

BI là phân giác của $\angle{ABC}$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của 3 đường phân giác trong tam giác ABC

Vậy I là giao điểm các đường phân giác của hai tam giác ABC và tam giác DEF .