

A. NỘI DUNG ÔN TẬP

1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.
2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.
3. Giải toán bằng cách lập hệ phương trình.
4. Liên hệ giữa cung và dây.
5. Góc ở tâm, góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.
6. Tứ giác nội tiếp.

B. MỘT SỐ BÀI TẬP THAM KHẢO

I. CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 16$;
- 2) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$;
- 3) Cho $P = A.B$. So sánh P với 3.

Bài 2. Cho các biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}, \quad B = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{8}{4 - x} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4.$$

- 1) Tính giá trị của A tại $x = \frac{36}{25}$;
- 2) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$;
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của B .

Bài 3. Cho hai biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 5}{x - 1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = \frac{4}{25}$;
- 2) Chứng minh rằng $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1}$;
- 3) Đặt $P = A.B$. Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{1}{P} < \sqrt{x} - 2$.

Bài 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 8}{x + 7}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} + \frac{8\sqrt{x} + 24}{x - 9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$;
- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} - 3}$;
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{\frac{B}{A}}$.

Bài 5. Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$.

1) Rút gọn biểu thức B ;

2) Cho biểu thức $P = A.B$. Tìm x thỏa mãn: $P.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Bài 6. Với $x \geq 0; x \neq 25$ cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} + \frac{7}{\sqrt{x}+5} + \frac{2\sqrt{x}-60}{25-x}$

1) Rút gọn biểu thức B ;

2) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{A}{B}$ là một số tự nhiên.

Bài 7. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$;

2) Với $x \in \mathbb{N}, x \neq 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$.

II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 8. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x+1) + 2(y-2) = 5 \\ 3(x+1) - (y-2) = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y} = -1 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{5}{y} = 1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{2}{x-y} = \frac{3}{2} \\ \frac{5}{x+y} - \frac{4}{x-y} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 16 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -11 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+1} = 4 \\ (x+y) - 3\sqrt{x+1} = -5 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2|x+2| - \sqrt{1-y} = 4 \\ |x+2| - 3\sqrt{1-y} = -3 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y-1}} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y-1}} = 2 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-y} = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{\sqrt{x}-1} - \frac{4}{x-y} = 3 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|2y-1|} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|2y-1|} = 3 \end{cases}$$

Bài 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ mx - y = m \end{cases}$

1) Giải hệ phương trình khi $m = -1$;

2) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất;

3) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x > 1; y > 0$.

Bài 10. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$$

- 1) Giải hệ phương trình trên khi $m = 2$;
- 2) Tìm các số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà $x; y$ có giá trị nguyên;
- 3) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m .

Bài 11. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}$$

- 1) Với giá trị nguyên nào của m thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > 0; y < 0$;
- 2) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà $P = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 12. Giải các phương trình sau:

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 1) $2x^2 + 5x + 1 = 0$ | 2) $5x^2 - x - 2 = 0$ | 3) $11x^2 - \frac{1}{2}x + 9 = 0$ |
| 4) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ | 5) $4x^4 - 7x^2 - 2 = 0$ | 6) $3x - 2\sqrt{x} - 5 = 0$ |

Bài 13. Cho phương trình: $x^2 - x - 3 + m = 0$

- 1) Giải phương trình với $m = 1$;
- 2) Tìm m để phương trình có một nghiệm là 2. Tìm nghiệm còn lại;
- 3) Tìm m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó;
- 4) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 14. Cho phương trình: $x^2 - mx - 3 = 0$ (1)

- 1) Giải phương trình với $m = -1$;
- 2) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m ;
- 3) Tìm m để phương trình có một nghiệm là số nguyên âm lớn nhất. Tìm nghiệm còn lại của phương trình.

Bài 15. Cho phương trình: $x^2 - (m+1)x + m = 0$ (1)

- 1) Giải phương trình với $m = -3$;
- 2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm;
- 3) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là hai số đối nhau;
- 4) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2x_1 - x_2 = 1$;
- 5) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.

Bài 16. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là parabol (P) và đường thẳng $(d): y = x + 3$

- 1) Vẽ đồ thị hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ.
- 2) Gọi A và B là hai giao điểm của (P) và (d) . Tính diện tích tam giác OAB .

Bài 17. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - m + 1$ (m là tham số)

- 1) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ;

2) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) khi $m = 1$;

3) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

IV. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 18. Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc dự định. Vì có việc gấp phải đến B trước thời gian dự định là 45 phút nên người đó tăng vận tốc lên mỗi giờ 10 km. Tính vận tốc mà người đó dự định đi, biết quãng đường AB dài 90 km.

Bài 19. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, còn nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB .

Bài 20. Một chiếc phà đi xuôi dòng 80 km và ngược dòng 64 km hết 8 giờ. Nếu cũng trên khúc sông ấy, chiếc phà đi xuôi dòng 45 km và ngược dòng 60 km thì chỉ hết 6 giờ. Tính vận tốc riêng của chiếc phà và vận tốc của dòng nước.

Bài 21. Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 350 dụng cụ. Nhờ sắp xếp hợp lý dây chuyền sản xuất nên xí nghiệp I đã vượt mức 20% kế hoạch, xí nghiệp II đã vượt mức 10% kế hoạch, do đó cả hai xí nghiệp đã làm được 400 dụng cụ. Tìm số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Bài 22. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn, sau 2 giờ 24 phút thì đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi I, sau 2 giờ đóng vòi I, mở vòi II thì sau 3 giờ nữa mới đầy bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài 23. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và chảy đầy bể trong 4 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất có thể chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

Bài 24. Tính chu vi của một hình chữ nhật, biết rằng nếu tăng mỗi chiều hình chữ nhật lên thêm 4 m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 80 m^2 . Nếu giảm chiều rộng đi 2 m và tăng chiều dài 5 m thì diện tích hình chữ nhật bằng diện tích hình chữ nhật ban đầu.

Bài 25. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 5m. Nếu giảm chiều rộng đi 4m và giảm chiều dài đi 5 m thì diện tích mảnh đất giảm đi 180 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

V. HÌNH HỌC

Bài 26. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , C là một điểm nằm giữa O và A . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I . Lấy K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn O tại M , tia BM cắt tia CI tại D . Chứng minh:

1) Chứng minh tứ giác $BMKC$ và tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp;

2) Chứng minh $CK \cdot CD = CA \cdot CB$;

3) Gọi N là giao điểm của AD và đường tròn (O) , chứng minh B, K, N thẳng hàng;

4) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD nằm trên một đường thẳng cố định khi K di động trên đoạn thẳng CI .

Bài 27. Cho đường tròn tâm O và dây cung BC cố định khác đường kính. Gọi A là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC (A không trùng với B và C , $AB \neq AC$). Kẻ đường kính AK của đường

tròn (O). Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC ; E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến AK .

- 1) Chứng minh rằng A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn;
- 2) Chứng minh $BD.AC = AD.KC$;
- 3) Chứng minh DE vuông góc với AC ;
- 4) Khi điểm A di động trên cung nhỏ BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn là một điểm cố định.

Bài 28. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn (M, N là hai tiếp điểm). Kẻ đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại B và C (B nằm giữa A và C). Gọi K là trung điểm của BC .

- 1) Chứng minh: Bốn điểm A, M, N, O cùng thuộc một đường tròn;
- 2) Chứng minh: $AM^2 = AB.AC$;
- 3) Đường thẳng qua B , song song với AM cắt MN tại E . Chứng minh: $\widehat{MNK} = \widehat{KBE}$;
- 4) Chứng minh rằng: Khi đường thẳng d quay quanh điểm A thì trọng tâm G của $\triangle MBC$ luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 29. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Dây MN vuông góc với AB tại I sao cho $IA < IB$. Trên đoạn MI lấy điểm E ($E \neq M, E \neq I$). Tia AE cắt đường tròn tại điểm thứ hai là K .

- 1) Chứng minh bốn điểm: B, E, I, K cùng thuộc một đường tròn;
- 2) Chứng minh: $AE.AK = AM^2$;
- 3) Chứng minh: $BI.BA + AE.AK = 4R^2$;
- 4) Xác định vị trí của điểm I sao cho chu vi tam giác MIO đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R .

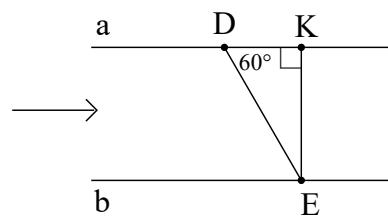
Bài 30. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm).

- 1) Chứng minh bốn điểm A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn;
- 2) Đường thẳng qua B và song song với AC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . Đoạn thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E . Chứng minh rằng $AB^2 = AD.AE$ và tam giác BCD cân;
- 3) Chứng minh BE đi qua trung điểm M của AC .

Bài 31. Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 6 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay lên cao được bao nhiêu ki-lô-mét theo phương thẳng đứng?

Bài 32. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc bằng 42° . Cùng thời điểm đó bóng của một cột đèn trên mặt đất dài 7,2 m. Tính chiều cao của cột đèn. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

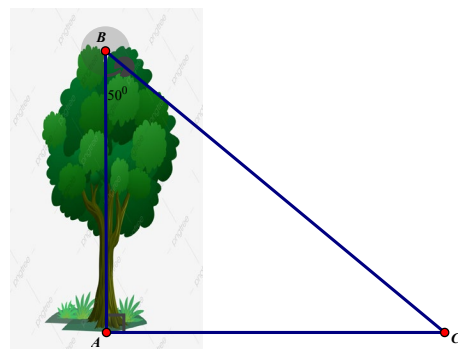
Bài 33. Một con thuyền ở địa điểm D di chuyển từ bờ sông a sang bờ sông b với vận tốc trung bình là 2 km/h, vượt qua khúc sông nước chảy mạnh trong 20 phút. Biết đường đi con thuyền là DE , tạo với bờ sông một góc 60° . Tính chiều rộng khúc sông.



Bài 34. Một chiếc thang dài 3,5 m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu để nó tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc an toàn là 75° (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Bài 35. Tại một thời điểm trong ngày, một cái cây có bóng trên mặt đất dài 4,5 m. Tính chiều cao của cây biết tia nắng mặt trời hợp với phương thẳng đứng một góc 50° .



VI. TOÁN NÂNG CAO

Bài 36. Cho hai số thực x, y dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + \frac{1}{x+y}$.

Bài 37. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$.

Bài 38. Cho số thực a, b không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $C = \sqrt{a(29a+3b)} + \sqrt{b(29b+3a)}$.

Bài 39. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Bài 40. Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} = 35 - 2x$.

-----HẾT-----