

A. LÝ THUYẾT:**I. Đại số:** Ôn tập kiến thức chương I, chương II**II. Hình học:** Ôn tập kiến thức chương I, chương II**B. BÀI TẬP :****I. Dạng I: Biến đổi biểu thức chứa căn****Bài 1:** Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ (ĐK: $x > 0; x \neq 1$)a) Tính giá trị của A khi $x = 36$. b) Rút gọn B. c) Tìm x để $B \leq \frac{1}{3}$.d) Tìm giá trị của x để biểu thức $P = A.B$ nhận giá trị là số nguyên.**Bài 2:** Cho biểu thức: $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ a) Rút gọn B b) Tính B biết $x = 4 - 2\sqrt{3}$ c) Tìm x để $B < 1$
d) Tìm x để $B > 0; B < 0$ e) Tìm x nguyên để B nguyên f) Tìm x để $B.(\sqrt{x}+1) = -x$
g) Tìm x để B có giá trị nhỏ nhất h) Tìm giá trị lớn nhất của $P = B.(3-x+2\sqrt{x})$ **Bài 3:** Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3}-x}{\sqrt{x}-1}$ a) Rút gọn P. b) Tìm x để $P > 0$. c) Tính giá trị của P nếu $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}}$.**Bài 4:** Cho biểu thức $D = \left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ a) Rút gọn D b) Tính D biết $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ c) Tìm x để $D = \sqrt{x}$
d) Tìm số tự nhiên x để D là số tự nhiên e) Với $x > 1$ so sánh D và $\sqrt{D}$ **Bài 5:** Cho biểu thức: $C = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-3\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$ a) Rút gọn C. b) Tìm x để $C \geq 0$. c) Tìm x để $C = \frac{6}{5}$ **Bài 6:** Cho biểu thức: $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$ a) Rút gọn P b) Tìm x để $P \geq 0$.
c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $P \in \mathbb{Z}$. d) Tìm x để $\sqrt{x} \times P$ đạt giá trị nhỏ nhất.**Bài 7:** Với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 4$, cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3} \quad \text{và} \quad B = \left(\frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x+\sqrt{x}-6}{4-x} \right) : \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 81$. b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm x để $B(\sqrt{x}-3) = x - 2\sqrt{x} + 4$. d) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{A}{B}$ nhận giá trị nguyên

Bài 8: Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x} + 13\sqrt{x} - 6}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$

a) Rút gọn A. b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $A \in \mathbb{Z}$. c) Tìm x để $A > 2$. d) Tìm x biết $|A| + A = 0$

e) Với giá trị nào của x thì P đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{x + \sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ (ĐK: $x \geq 0; x \neq 1$)

a) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{4}$. b) Rút gọn B. c) Tìm g/trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{A}{B}$.

II. Dạng 2: Các bài toán về hàm số bậc nhất

Bài 1: (Đề thi HKI năm học 2021 - 2022)

Cho hàm số $y = (m-2)x + 3$ (m là tham số, $m \neq 2$) có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Vẽ (d) khi $m = 4$.

b) Tìm m để (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3 .

c) Cho $(d'): y = x + 3$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d), (d') với trục hoành; C là giao điểm của (d) và (d'). Tìm m để diện tích tam giác ABC bằng 3.

Bài 2:

Cho hàm số $y = (m-1)x + m - 3$ (1) (với m là tham số và m khác 1).

a) Khi $m = 0$, hãy vẽ đồ thị hàm số (1) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

c) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với hai trục tọa độ Ox, Oy. Tìm m sao cho tam giác OAB cân.

Bài 3:

Cho hàm số $y = mx + 1$ (1) (với m là tham số, $m \neq 0$)

a) Tìm m để đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $M(-1; -1)$. Với m vừa tìm được, vẽ đồ thị hàm số (1) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) song song với đường thẳng (d): $y = (m^2 - 2)x + 2m + 3$.

c) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đồ thị hàm số (1) bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Bài 4. Cho hàm số $y = (m-1)x + m$ (d)

a) Xác định m để hàm số trên là hàm số bậc nhất

b) Tìm m để hàm số trên là hàm số bậc nhất đồng biến, nghịch biến.

c) Xác định m để đường thẳng (d):

i) Song song với đường thẳng có phương trình $x - 2y = 1$.

ii) Cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ $x = 2$.

iii) Cắt đường thẳng (d'): $y = 2x - 3$ tại điểm nằm trên trục tung.

d) CM đường thẳng (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

e) Xác định m để khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) lớn nhất.

g) Tìm m để đường thẳng (d) cắt 2 trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2

Bài 5. Cho các hàm số $y = mx + m^2 - 1$ và $y = 2x + 3$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng (d_1) và (d_2) .

- Cho $m = 3$. Tìm tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) .
- Gọi giao điểm của (d_2) với trục tung và trục hoành lần lượt là B và C. Tính diện tích tam giác OBC.
- Tìm m để đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm nằm trên trục tung.
- Tìm m để đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 1.

Bài 6. Cho hàm số $y = (m^2 - 2m + 5)x + 2$ có đồ thị là đường thẳng d

- Tìm để $d \parallel d'$: $y = (m + 3)x + m$
- Tìm m để d cắt Ox tại A, cắt Oy tại B sao cho diện tích tam giác OAB lớn nhất.

Bài 7. Cho hàm số $y = (2 - m)x + m - 1$ (1). Tìm m biết

- Đồ thị của (1) đi qua gốc tọa độ?
- Đồ thị của (1) tạo với trục Ox một góc $\alpha = 30^\circ$
- Đồ thị của (1) tạo với trục Ox một góc $\alpha = 135^\circ$
- Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4
- Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng (-3)
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , họ đường thẳng xác định bởi hàm số (1) luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định tọa độ của điểm cố định đó.

Bài 8. Cho đường thẳng (d_m) : $y = (2m + 1)x + 4m + 2$ (2)

- Với $m = \frac{1}{2}$
 - Vẽ đường thẳng (d_m) trên mặt phẳng tọa độ, tính diện tích tam giác tạo bởi đường thẳng (d_m) với hai trục tọa độ.
 - Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng (d_m) .
- Tìm điểm cố định K mà (d_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m
- Tìm trên Oy hai điểm E và F sao cho tam giác KEF vuông cân.

III. Các bài toán hình học:

Bài 1: Thang AB dài 6,7m tựa vào tường làm thành góc 63° với mặt đất. Hỏi chiều cao của cái thang đạt được so với mặt đất ?

Bài 2: Tàu ngầm đang ở trên mặt biển bỗng đột ngột lặn xuống theo phương tạo với mặt nước biển một góc 21° (Hình 1)

- Nếu tàu chuyển động theo phương lặn xuống được 300m thì nó ở độ sâu bao nhiêu? Khi đó khoảng cách theo phương nằm ngang so với nơi xuất phát là bao nhiêu?
- Tàu phải chạy bao nhiêu mét để đạt đến độ sâu 1000m?

Bài 3: Tính chiều cao của cây trong hình 2 (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Bài 4: Một máy bay (minh họa Hình 3) đang bay ở độ cao 12 km. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.

- Nếu cách sân bay 320 km máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?
- Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Bài 5:

Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Trên đường tròn (O) lấy điểm D sao cho $AD > BD$; D khác A và B . Kẻ OH vuông góc với AD tại H , tia OH cắt tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) tại C .

- Chứng minh H là trung điểm của AD và OH . $OC = R^2$.
- Gọi E là giao điểm của BC và đường tròn (O) . Chứng minh bốn điểm A, H, E, C cùng thuộc một đường tròn và CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC , đường thẳng này cắt tia CA tại M , kẻ tia CN vuông góc với MB tại N . Gọi K là giao điểm của CN và AB . Chứng minh $KH \perp CD$.

Bài 6:

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB khác đường kính. Kẻ OI vuông góc với AB tại I , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt đường thẳng OI tại M .

- Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$.
- C/ minh MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) và bốn điểm A, B, M, O cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt đường thẳng AB tại điểm N . Chứng minh MD vuông góc với ON .

Bài 7:

Cho đường tròn $(O; R)$ cố định. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AB .

- Chứng minh OM vuông góc với AB và $OH \cdot OM = R^2$.
- Từ M kẻ cát tuyến MNP với đường tròn (N nằm giữa M và P), gọi I là trung điểm của NP (I khác O). Chứng minh 4 điểm A, M, O, I cùng thuộc một đường tròn và tìm tâm của đường tròn đó.
- Qua N kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) , cắt MA, MB theo thứ tự ở C và D . Biết $MA = 5\text{cm}$. Tính chu vi tam giác MCD .
- Qua O kẻ đường thẳng d vuông góc với OM , cắt tia MA, MB lần lượt tại E và F . Xác định vị trí của M để diện tích tam giác MEF nhỏ nhất.

Bài 8. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đoạn OA lấy điểm H , dây DC vuông góc với OA tại H . lấy điểm E đối xứng với điểm A qua điểm H .

- Tứ giác $ACED$ là hình gì? Tại sao?
- Gọi I là giao điểm của DE và BC . Chứng minh bốn điểm H, I, B, D cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EB .
- Tìm vị trí điểm H trên đoạn OA để diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 9. Cho nửa đường tròn đường kính AB bằng $2R$. Gọi Ax, By theo thứ tự là các tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O tại A, B (Ax, By nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa AB). Qua điểm M thuộc đường tròn tâm O (M khác A, B), kẻ đường thẳng vuông góc với OM tại M cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D .

- Chứng minh $\angle COD = 90^\circ$.
- Chứng minh $AC \cdot BD = R^2$.
- Gọi E là giao điểm của OC với AM và F là giao điểm của OD với BM . Tứ giác $OEMF$ là hình gì? Vì sao?
- Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn đường kính AB nói trên để tứ giác $OEMF$ có chu vi lớn nhất.

Bài 10. Cho đường tròn (O;R) đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho góc MAB bằng 60° . Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

- Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn (B;BM)
- Chứng minh $MN^2 = 4 \cdot AH \cdot HB$.
- CM tam giác BMN là tam giác đều
- Tia OM cắt đường tròn (O) tại E, tia BM cắt đường tròn (B;BM) tại F. Chứng minh rằng ba điểm N, E, F thẳng hàng.

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm O, bán kính R, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. M là điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn (O), tiếp tuyến tại M cắt Ax và By lần lượt là C và D.

- Chứng minh rằng $AC + BD = CD$ và góc COD bằng 90°
- Chứng minh rằng: Tích $AB \cdot BD$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
- Chứng minh rằng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác COD luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định khi điểm M chuyển động trên nửa đường tròn tâm O
- Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn để tứ giác ABDC có diện tích nhỏ nhất. tính diện tích nhỏ nhất đó theo R.

Bài 12. Cho tam giác nhọn ABC có góc A bằng 60° , AB bằng 4cm. Đường tròn tâm O đường kính AB cắt CA, CB tại M và N. AN cắt BM tại H. Tia BM cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O tại D.

- Chứng minh $CM \cdot CA = CN \cdot CB$
- Tính BM, BD
- Chứng minh $\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \cos^2 ACB$
- Chứng minh ON là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CHN

Bài 13 Cho (O) đường kính AB bằng 2R. vẽ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Trên tia Bx lấy điểm M, vẽ tiếp tuyến MC với (O) (C là tiếp điểm)

- Chứng minh OM vuông góc với BC
- BC cắt OM tại I. gọi H là trung điểm của AC, tia OH cắt tia MC tại N. Tứ giác OHCI là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh $AN \cdot BM = \frac{AB^2}{4}$
- Vẽ CE vuông góc với AB (E thuộc AB). Tìm vị trí của M trên tia Bx để tam giác OCE có chu vi lớn nhất.

Bài 14: Cho (O;R) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB; AC đến đường tròn.

- Chứng minh 4 điểm : A;B;C;O cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh: $BE \perp OA$ và $OE \cdot OA = R^2$.
- Lấy K thuộc cung nhỏ BC ($K \neq B; K \neq C$). Tiếp tuyến tại K của (O) cắt AB ; AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K di chuyển trên cung nhỏ BC.

Bài 15. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I. Tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F; tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

- Chứng minh $AI^2 = IM \cdot IB$.
- Chứng minh tam giác BAF cân.
- Chứng minh AKFH là hình thoi.

Bài 16. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$ và hai tiếp tuyến Ax và By. Một đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn tại M ($M \neq A; B$) cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N. Chứng minh:

- a) $AC + BD = CD$. b) $OC \perp OD$ c) $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$ d) $OC \parallel BM$
 e) AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD. g) $MN \perp AB$
 h) Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 17. Cho đường tròn tâm (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi d là tiếp tuyến của (O), A là tiếp điểm. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc d. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BM cắt d tại N.

- a) Chứng minh rằng tích $AM \cdot AN$ không đổi khi M chuyển động trên d.
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

Bài 18. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC, tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E. Tia CE cắt (O) tại điểm thứ hai F

- a) CMR: đường thẳng BC song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O).
 b) CM: tứ giác ABCE là hình bình hành.
 c) Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của các tia BC và OI. So sánh góc BAC và góc BGO.

Bài 19. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, AC là dây cung của nó. Kẻ tiếp tuyến Ax và kẻ đường phân giác của góc CAx cắt đường tròn tại E và BC kéo dài tại D.

- a) Chứng minh tam giác ADB cân và $OE \parallel BD$.
 b) Gọi I là giao điểm của AC và BE. Chứng minh: $DI \perp AB$.
 c) Khi C chạy trên đường tròn (O) thì D chạy trên đường nào.

IV. Các bài tập nâng cao

Bài 1: Giải các phương trình sau:

- a) $x^2 + \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 5x$ b) $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$
 c) $3x - x\sqrt{3x-1} = \sqrt{3x^2 + 2x - 1} - x\sqrt{x+1} + 1$ d) $\sqrt{x^3+1} = \frac{2x^2+4}{5}$

Bài 2: Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ac = 3$. Chứng minh: $\sqrt{a^2+3} + \sqrt{b^2+3} + \sqrt{c^2+3} \leq 2(a+b+c)$

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = \frac{2x+3\sqrt{2x-1}+1}{x+2\sqrt{2x-1}+1}$

----- HẾT -----