

Câu 1 (4 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{2(\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{2+2x-3\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Câu 2 (4 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn $(2023^{2022} + 1)$ chia hết cho $n^3 + 2021n$.
2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $2x^2 + x = 3y^2 - y$. Chứng minh $x+y$; $2x-2y+1$ và $3x-3y+1$ đều là các số chính phương.

Câu 3 (4 điểm)

1. Giải phương trình $x+5=3\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2+x}$.
2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $x+y+z=-2$, $x^2+y^2+z^2=6$ và $xyz=1$. Tính giá trị của $S = \frac{1}{xy-z-1} + \frac{1}{yz-x-1} + \frac{1}{zx-y-1}$.

Câu 4 (6 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và lấy D là điểm bất kỳ trên cạnh AB (D khác A và B). Trên cạnh CD lấy hai điểm E, F sao cho $AE \perp CD$ và $CF = AE$.

1. Chứng minh $AC \cdot AD = CF \cdot CD$.
2. Chứng minh $\triangle MEF$ vuông cân.
3. Tính $\widehat{ACD}$ biết rằng diện tích $\triangle ABC$ gấp 4 lần diện tích $\triangle MEF$.

Câu 5 (2 điểm)

1. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c \leq 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{2a+b+3c} + \frac{ca}{3a+2b+c}.$$

2. Cho một lớp học có 42 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Biết rằng mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ và nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 11 học sinh.

. ----- Hết -----

Giám thị coi thi không giải và ghi thêm.

Họ tên thí sinh: