

Câu 1. (2,5 điểm) Cho hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $d: y = 2x + m$.

Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{7}$ (với O là gốc tọa độ).

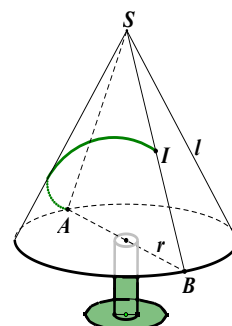
Câu 2. (2,5 điểm) Một hộp đựng 20 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 20. Một người rút ngẫu nhiên cùng lúc 3 tấm thẻ. Tính xác suất để bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị.

Câu 3. (2,5 điểm) Cho hàm số bậc ba $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, biết $4a + c > 2b + 8$ và $2a + 4b + 8c + 1 < 0$. Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$.

Câu 4. (2,5 điểm) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, tam giác ABD đều cạnh a , tam giác BCD cân tại C và $\widehat{BCD} = 120^\circ$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = \sqrt{2}a$. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4 - x^2$. Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + x) + m\left(2\ln x - \frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 6. (2,0 điểm) Phần trên của một cây thông Noel có dạng hình nón, đỉnh S , độ dài đường sinh $l = 2\text{m}$ và bán kính đáy $r = 1\text{m}$. Biết rằng AB là một đường kính đáy của hình nón và I là trung điểm đoạn thẳng SB (tham khảo hình vẽ). Để trang trí, người ta lắp một dây bóng nháy trên mặt ngoài của cây thông từ vị trí A đến I . Tính độ dài ngắn nhất của dây bóng nháy.



Câu 7. (2,0 điểm) Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x}$ với m là tham số thực. Tìm m để phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 8. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+x^2} + x$. Tìm m để bất phương trình

$$(x-m)f(x-m) + \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f(1+\sqrt{1-x^2})} \leq 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 1].$$

Câu 9. (2,0 điểm) Cho các số thực $a, b, c \in [4; 8]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{4} \log_2^3(abc).$$

-----HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ TĨNH	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2020-2021 - Môn: TOÁN
---	---

HƯỚNG DẪN CHẤM
(*Hướng dẫn chấm gồm có 4 trang*)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Mọi cách giải khác đáp án, mà đúng và đủ các bước đều cho điểm tương ứng;
- Ban Giám khảo có thể thống nhất phân chia các ý để cho điểm đến 0.25;
- Điểm toàn bài không quy tròn.

II. ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	NỘI DUNG	Điểm
Câu 1 (2.5 đ)	Pt hoành độ giao điểm của d và (C) $\frac{-2x+1}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (m+4)x + m - 1 = 0(*) \\ x \neq -1 \end{cases} \quad \Delta = m^2 + 24 > 0, \forall m \in R.$	0.5
	$ x_A - x_B = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } = \frac{\sqrt{m^2 + 24}}{2}; y_A - y_B = 2x_A - 2x_B $ $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{5} x_A - x_B = \frac{\sqrt{5(m^2 + 24)}}{2}$	0.5
	$d(O, AB) = \frac{ m }{\sqrt{5}}$	0.5
	$S_{\Delta OAB} = \sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(O, AB) \cdot AB = \sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{ m }{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5(m^2 + 24)}}{2} = \sqrt{7}$	0.5
	$\Leftrightarrow m^4 + 24m^2 - 112 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$	0.5
Câu 2 (2.5đ)	Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140.$	1.0
	Gọi A là biến cố rút được ba tấm thẻ sao cho bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị. Biến cố $\bar{A}$ xảy ra khi có các trường hợp sau: TH 1. Chọn ra 3 tấm thẻ ghi số liên tiếp có 18 cách.	0.5
	TH2. Chọn ra 3 tấm thẻ trong đó có đúng 2 tấm thẻ ghi số liên tiếp: Nếu hai tấm thẻ liên tiếp đó đánh số 1,2 và 19,20 thì có 17 cách chọn tấm thẻ còn lại. Nếu hai tấm thẻ đó bắt đầu từ cặp số 2,3 đến cặp số 18,19 thì mỗi cặp số sẽ có 16 cách chọn tấm thẻ còn lại. Vậy TH 2 có $2 \cdot 17 + 17 \cdot 16 = 306$ cách. Suy ra $n(\bar{A}) = 18 + 306 = 324$	0.5
	Suy ra $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{324}{1140} = \frac{27}{95}$, suy ra $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{68}{95}$	0.5
Câu 3 (2.5 đ)	Ta có $4a - 2b + c - 8 > 0 \Rightarrow f(-2) > 0$ $2a + 4b + 8c + 1 < 0 \Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right) < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	0.5
	Ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, nên tồn tại số $p > \frac{1}{2}$ sao cho $f(p) > 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, nên tồn tại số $q < -2$ sao cho $f(q) < 0$	0.5

	$g'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + 2t \geq 2\sqrt{\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}} + 2t = 2\sqrt{t^2} + 2t \text{ (BĐT Cauchy)}$ $\Rightarrow g'(t) \geq 2 t + 2t \geq 0, \text{ Vậy hàm số } g(t) \text{ luôn đồng biến trên } \mathbb{R}$	0,5														
	$(1) \Leftrightarrow g(x-m) \leq g(-1-\sqrt{1-x^2}) \Leftrightarrow x-m \leq -1-\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow m \geq x+1+\sqrt{1-x^2}$ Để (1) luôn đúng ta phải có $m \geq \underset{[-1;1]}{\text{Max}}(x+1+\sqrt{1-x^2})$ Đặt $h(x) = x+1+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow h'(x) = 1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Từ đó suy ra $\underset{[-1;1]}{\text{Max}}(x+1+\sqrt{1-x^2}) = 1+\sqrt{2}. \text{ Vậy } m \geq 1+\sqrt{2}.$	0,5														
Câu 9 (2.0đ)	Xét hàm số $f(x) = x^2 - 48\log_2 x + 80$ trên $[4;8]$ ta có $f'(x) = 2x - \frac{48}{x \ln 2} = \frac{(2 \ln 2)x^2 - 48}{x \ln 2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{24}{\ln 2}} (=x_0)$ <table><tr><td>x</td><td>4</td><td>x_0</td><td>8</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>—</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td></td><td></td><td>0</td></tr></table> $\nearrow f(x_0) \searrow$ $\Rightarrow x^2 - 48\log_2 x + 80 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 48\log_2 x - 80, \forall x \in [4;8]$	x	4	x_0	8	$f'(x)$		—	0	+	$f(x)$	0			0	0.5
x	4	x_0	8													
$f'(x)$		—	0	+												
$f(x)$	0			0												
	$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{4}\log_2^3(abc) \leq 48(\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c) - 240 - \frac{1}{4}\log_2^3(abc)$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{4}\log_2^3(abc) \leq 48\log_2(abc) - 240 - \frac{1}{4}\log_2^3(abc)$	0.5														
	$a, b, c \in [4;8] \Rightarrow \log_2 a, \log_2 b, \log_2 c \in [2;3] \Rightarrow \log_2(abc) \in [6;9]$ Xét hàm số $g(x) = 48x - 240 - \frac{1}{4}x^3$ trên $[6;9]$ ta có $g'(x) = 48 - \frac{3}{4}x^2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8$ <table><tr><td>x</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>—</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td></td><td>16</td><td></td></tr></table> $\nearrow g(x) \searrow$ Suy ra $g(x) \leq 16$	x	6	8	9	$g'(x)$		+	0	—	$g(x)$			16		0,5
x	6	8	9													
$g'(x)$		+	0	—												
$g(x)$			16													
	$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{4}\log_2^3(abc) \leq 48\log_2(abc) - 240 - \frac{1}{4}\log_2^3(abc) \leq 16$ Dấu bằng xảy ra khi $abc = 256$ và $\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c$ nhận giá trị bằng 2 hoặc 3. Suy ra $a = b = 8, c = 4; a = c = 8, b = 4$ hoặc $c = b = 8, a = 4$ Vậy $\max F = 16$	0.5														

.....HẾT.....