

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Ngày thi: 21/10/2023

Câu 1. (4.0 điểm)

1.1. Cho $a + b = 1$. Tính giá trị biểu thức: $M = 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$

1.2. Cho $x = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt{9-4\sqrt{5}} - 2}$. Tính giá trị biểu thức $P = (x^2 + x + 1)^{2017}$.

Câu 2. (4.0 điểm)

2.1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^3 - 7n : 6$ chia hết cho 6.

2.2. Bạn An mua một số quyển vở và bút máy hết tất cả là 102 nghìn đồng. Biết giá mỗi quyển vở là 12 nghìn đồng, giá mỗi cây bút là 10 nghìn đồng. Hỏi bạn An mua được bao nhiêu quyển vở và bao nhiêu cây bút?

Câu 3. (4.0 điểm)

3.1. Định mức giá điện sinh hoạt năm 2021 như sau:

Số điện (kWh)	Giá bán điện (đồng/kWh)
Bậc 1: Từ 0 – 50 kWh	1.678
Bậc 2: Từ 51 – 100 kWh	1.734
Bậc 3: Từ 101 – 200 kWh	2.014
Bậc 4: Từ 201 – 300 kWh	2.536
Bậc 5: Từ 301 – 400 kWh	2.834
Bậc 6: Từ 401 kWh trở lên	2.927

Tiền điện được tính theo bậc, với thuế giá trị gia tăng (GTGT) 10%.

a) Trong tháng 6/2021, nhà bạn Xuân sử dụng hết 230 kWh điện. Tính tiền điện nhà bạn Xuân phải trả.

b) Cũng trong tháng đó, nhà bác Hạ đã phải trả 548 680 đồng tiền điện. Hỏi nhà bác Hạ đã sử dụng hết bao nhiêu kWh điện?

3.2. Cho x, y, a, b là những số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b}$
và $x^2 + y^2 = 1$ ($a + b \neq 0$). Chứng minh rằng: $\frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a + b)^{1003}}$

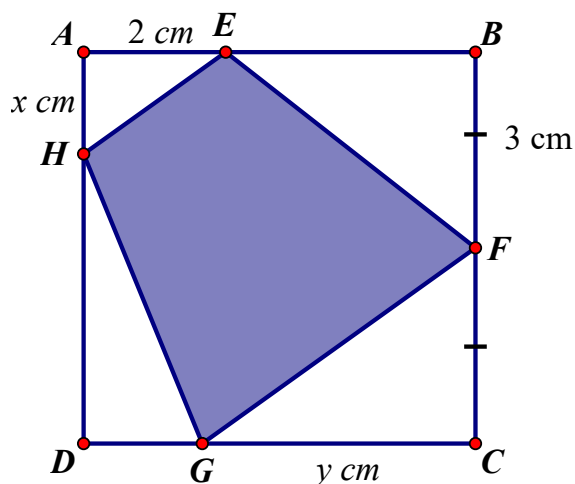
Câu 4. (4.0 điểm)

4.1. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Tính giá trị biểu thức $2022\left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}\right) + 2023$

4.2. Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng (d) đi qua A cắt đường chéo BD tại P , cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{AP}$

Câu 5. (4.0 điểm)

- 5.1. Cho p là số nguyên tố sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa $x^3 + y^3 - p = 3xy - 1$
Tìm giá trị lớn nhất của p
- 5.2. Từ tấm nhôm hình vuông cạnh 6 dm. Người ta muốn cắt một hình thang (phần tô đậm trong hình vẽ). Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang cắt được nhỏ nhất.

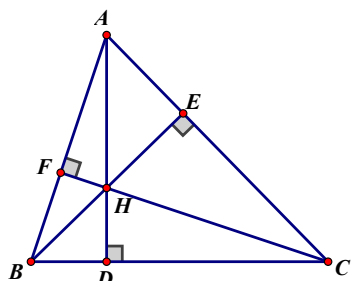


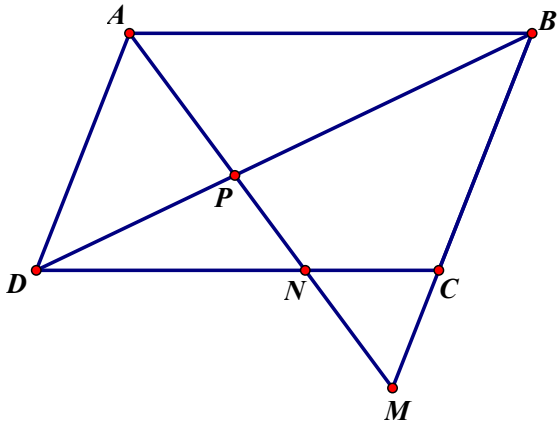
.....Hết.....

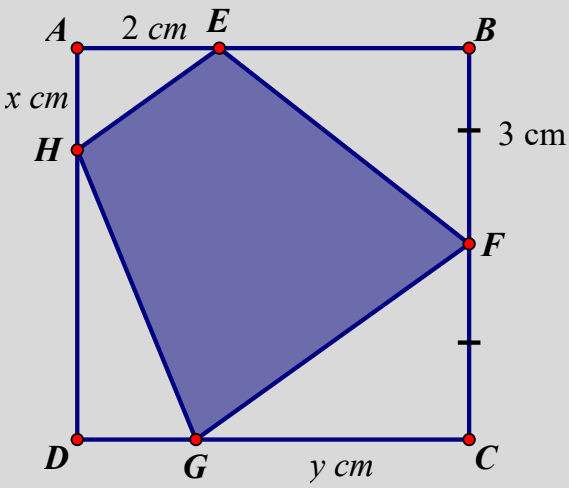
(Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

HƯỚNG DẪN CHẤM

CÂU	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
Câu 1.1 (2,0 điểm)	Cho $a + b = 1$. Tính giá trị biểu thức: $M = 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$	
	$M = 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2) = 2[(a + b)^3 - 3ab(a + b)] - 3[(a + b)^2 - 2ab]$	1,0 đ
	$= 2(a + b)^3 - 6ab(a + b) - 3(a + b)^2 + 6ab$	0,5 đ
	$= 2.1^3 - 6.ab.1 + 6ab - 3.1^2 = -1$	0,5 đ
Câu 1.2 (2,0 điểm)	Cho $x = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2).\sqrt{9-4\sqrt{5}} - 2}$. Tính giá trị biểu thức $P = (x^2 + x + 1)^{2017}$.	
	$x = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2).\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - 2} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{(5-4)-2} = -1$	1,5 đ
	$P = (x^2 + x + 1)^{2017} = 1$	0,5 đ
Câu 2.1 (2,0 điểm)	Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^3 - 7n : 6$ chia hết cho 6.	
	$n^3 - 7n = (n^3 - n) - 6n$	0,5 đ
	$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$	0,5 đ
	Lý luận, chứng minh được $(n-1)n(n+1) : 6$ (nếu không nêu được 2,3 nguyên tố cùng nhau thì cho 0,25 đ)	0,5 đ
	Nêu được $6n : 6$, từ đó suy ra đpcm	0,5 đ
Câu 2.2 (2,0 điểm)	Bạn An mua một số quyển vở và bút máy hết tất cả là 102 nghìn đồng. Biết giá mỗi quyển vở là 12 nghìn đồng, giá mỗi cây bút là 10 nghìn đồng. Hỏi bạn An mua được bao nhiêu quyển vở và bao nhiêu cây bút?	
	Gọi x là số quyển vở, y là số cây bút máy ($x, y \in \mathbb{N}^*$)	0,25 đ
	Lập được phương trình $12x + 10y = 102 \Leftrightarrow 6x + 5y = 51$	0,25 đ
	$\Leftrightarrow 5y = 51 - 6x \Leftrightarrow x = \frac{51-5y}{6}$	0,25 đ
	Lý luận suy ra được $5y < 51 \Rightarrow y < \frac{51}{5} < 11$ Vì $51 - 6x : 3$ và $(3; 5) = 1 \Rightarrow y : 3$ Suy ra $y = 3$ hoặc $y = 6$ hoặc $y = 9$	0,75 đ
	Với $y = 3 \Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn) Với $y = 9 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn)	0,25 đ

	Kết luận	0,25 đ														
Câu 3.1 (2,0 điểm)	Định mức giá điện sinh hoạt năm 2021 như sau: <table><tr><th>Số điện (kWh)</th><th>Giá bán điện (đồng/kWh)</th></tr><tr><td>Bậc 1: Từ 0 – 50 kWh</td><td>1.678</td></tr><tr><td>Bậc 2: Từ 51 – 100 kWh</td><td>1.734</td></tr><tr><td>Bậc 3: Từ 101 – 200 kWh</td><td>2.014</td></tr><tr><td>Bậc 4: Từ 201 – 300 kWh</td><td>2.536</td></tr><tr><td>Bậc 5: Từ 301 – 400 kWh</td><td>2.834</td></tr><tr><td>Bậc 6: Từ 401 kWh trở lên</td><td>2.927</td></tr></table> Tiền điện được tính theo bậc, với thuế giá trị gia tăng (GTGT) 10%. a) Trong tháng 6/2021, nhà bạn Xuân sử dụng hết 230 kWh điện. Tính tiền điện nhà bạn Xuân phải trả. b) Cũng trong tháng đó, nhà bác Hạ đã phải trả 548 680 đồng tiền điện. Hỏi nhà bác Hạ đã sử dụng hết bao nhiêu kWh điện?	Số điện (kWh)	Giá bán điện (đồng/kWh)	Bậc 1: Từ 0 – 50 kWh	1.678	Bậc 2: Từ 51 – 100 kWh	1.734	Bậc 3: Từ 101 – 200 kWh	2.014	Bậc 4: Từ 201 – 300 kWh	2.536	Bậc 5: Từ 301 – 400 kWh	2.834	Bậc 6: Từ 401 kWh trở lên	2.927	
	Số điện (kWh)	Giá bán điện (đồng/kWh)														
	Bậc 1: Từ 0 – 50 kWh	1.678														
	Bậc 2: Từ 51 – 100 kWh	1.734														
	Bậc 3: Từ 101 – 200 kWh	2.014														
Bậc 4: Từ 201 – 300 kWh	2.536															
Bậc 5: Từ 301 – 400 kWh	2.834															
Bậc 6: Từ 401 kWh trở lên	2.927															
a) Tính đúng 492 888 đồng	1,0 đ															
b) Tính đúng 250kWh	1,0 đ															
Câu 3.2 (2,0 điểm)	Cho x, y, a, b là những số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b}$ và $x^2 + y^2 = 1$ ($a + b \neq 0$). Chứng minh rằng : $\frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a + b)^{1003}}$															
	$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b} = \frac{(x^2 + y^2).1}{a + b} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a + b}$	0,5 đ														
	$\Leftrightarrow \frac{bx^4 + ay^4}{ab} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a + b} \Leftrightarrow (bx^4 + ay^4)(a + b) = ab(x^2 + y^2)^2$	0,25 đ														
	$\Leftrightarrow abx^4 + b^2x^4 + a^2y^4 + aby^4 = abx^4 + 2abx^2y^2 + aby^4 \Leftrightarrow b^2x^4 - 2abx^2y^2 + a^2y^4 = 0$	0,5 đ														
	$\Leftrightarrow (bx^2 - ay^2)^2 = 0 \Leftrightarrow bx^2 = ay^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b} = \frac{1}{a + b}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1003} = \left(\frac{y^2}{b}\right)^{1003} = \frac{1}{(a + b)^{1003}} \Rightarrow \frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a + b)^{1003}}$	0,75 đ														
Câu 4.1 (2,0 điểm)	Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Tính giá trị biểu thức $2022\left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}\right) + 2023$															
	Chứng minh được $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$ $;\frac{HE}{BE} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}};\frac{HF}{CF} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}$ $\Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ														
																

	$\Rightarrow 2022 \left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} \right) + 2023 = 4045$	0,5 đ
Câu 4.2 (2,0 điểm)	Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng (d) đi qua A cắt đường chéo BD tại P , cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng : $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{AP}$	
	$AD \parallel BM \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{DP}{DB};$ $AB \parallel MN \Rightarrow \frac{AP}{PN} = \frac{BP}{BD}$ $\Rightarrow \frac{AP}{AM} + \frac{AP}{PN} = \frac{BP}{BD} + \frac{DP}{DB} = 1$ $\Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{AP}$	0,5 đ
		0,5 đ
		0,5 đ
Câu 5.1 (2,0 điểm)	Cho p là số nguyên tố sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa $x^3 + y^3 - p = 3xy - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của p	
	$p = x^3 + y^3 + 1^3 - 3.1xy = (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy)$	0,25 đ
	Do x, y nguyên dương nên $x + y + 1 > 1$ và p là số nguyên tố nên $\begin{cases} x + y + 1 = p & (1) \\ x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy = 1 & (2) \end{cases}$	0,5 đ
	Chứng minh được $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$	0,25 đ
	$(2) \Leftrightarrow (x+y)^2 - (x+y) = 3xy \leq \frac{3}{4}(x+y)^2$ $\Leftrightarrow 4(x+y)^2 - 4(x+y) \leq 3(x+y)^2$ $\Leftrightarrow (x+y)^2 - 4(x+y) \leq 0$ $\Leftrightarrow (x+y)(x+y-4) \leq 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 4$ $\Leftrightarrow 1 \leq x+y+1 \leq 5$ $\Leftrightarrow 1 \leq p \leq 5$	0,25 đ
	Vậy GTLN của P là 5 khi $x = y = 2$.	0,25 đ
Câu 5.2	Từ tấm nhôm hình vuông cạnh 6 dm. Người ta muốn cắt một hình thang (phần tô đậm trong hình vẽ). Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang cắt được nhỏ nhất.	

(2,0 điểm)		
	Diện tích hình thang nhỏ nhất khi $S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất. Ta có: $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$ (1) Mà hai tam giác AEH và CGF đồng dạng nên $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2) Thay (2) vào (1) ta có: $2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)$ $2S$ lớn nhất khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Rightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \Rightarrow x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.	0,25 đ 0,25 đ 0,5 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,5 đ

(HS giải cách khác giám khảo tự phân bước cho điểm)