SỞ GD VÀ ĐT NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
PHAN BỘI CHÂU

Đề chính thức

(Đề thi gồm có 01 trang)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG TỈNH
NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn thi: Toán
Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1*(6,0 điểm).*

a) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
y’		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm các điểm cực trị của hàm sô $g(x) = f\left(\left|2x+1\right|-4\right)$.

b) Cho hàm số $y = f(x) = 2mx^3 + 3\left(m^2 - 7m + 2\right)x^2 - 32(x+1)\sqrt{x+1} - 6\left(3m^2 - 12m - 10\right)x$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 2*(5,0 điểm).*

a) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 1, SB = 2, SC = 3, \widehat{ASB} = 60^o, \widehat{BSC} = 120^o, \widehat{CSA} = 90^o$.

Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa các đường thẳng SA và BC.

b) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác $AB'A'$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'B)$ và $(AB'C')$. Biết $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ và $AA' + B'C' = 6$. Ký hiệu $V_{ABC.A'B'C'}$ là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Chứng minh $V_{ABC.A'B'C'} \le 24$.

Câu 3*(5,0 điểm).*

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m\sqrt{x^2 + x + 1} + 2m = 2x^2 + m\sqrt{x^2 - x + 1} + 7$$ có nghiệm thực.

b) Đặt ngẫu nhiên hết 9 viên bi được đánh số $1;2;3;4;5;6;7;8;9$ vào 9 ô vuông của lưới ô vuông 3 x 3 (hình vẽ lưới ô vuông dưới đây) sao cho mỗi ô vuông chỉ được đặt đúng một viên bi. Tính xác suất để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ.

Câu 4*(2,0 điểm).*

Cho tứ diện ABCD cố định, P là điểm thay đổi trong tam giác BCD. Gọi M, N, E thứ tự là hình chiếu vuông góc của P lên các mặt phẳng (ACD), (ADB), (ABC). Xác định vị trí của P để thể tích tứ diện PMNE đặt giá trị lớn nhất.

Câu 5*(2,0 điểm).*

Cho các số thực a, b, c thay đổi thỏa mãn các điều kiện $a \ge b \ge c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathrm{P} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

....***Hết***...

Họ và tên thí sinh……………………………………………...........… Số báo danh……………………

SỞ GD VÀ ĐT NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
PHAN BỘI CHÂU

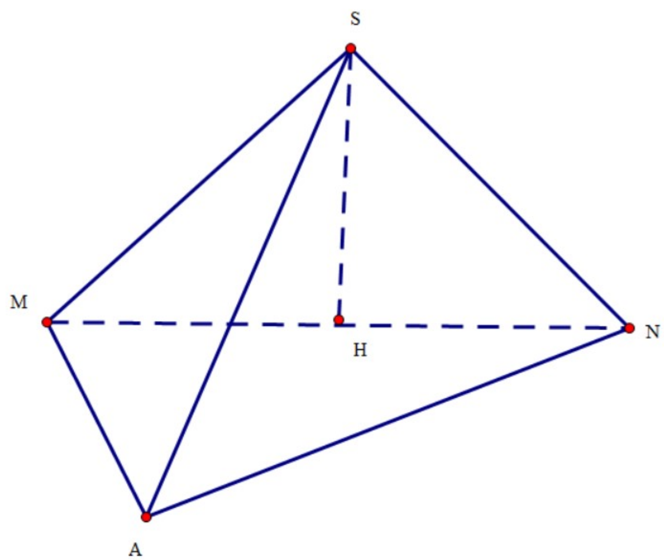
HƯỚNG DẪN CHẤM

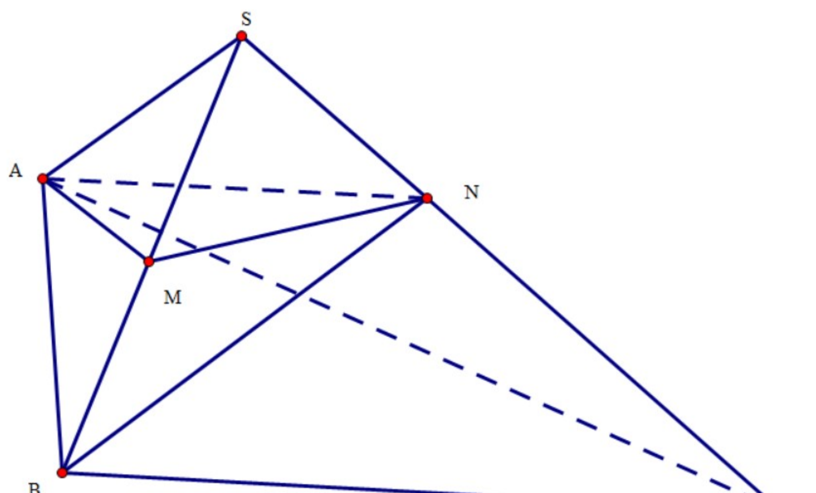
KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG TỈNH
NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: Toán

Câu	Nội dung	Điểm
1 (6,0đ)	**a) (3,0 điểm)**	
	Ta có $g'(x)=\left(\lvert 2x+1\rvert-4\right)' f'\left(\lvert 2x+1\rvert-4\right)=\dfrac{4x+2}{\lvert 2x+1\rvert}.f'\left(\lvert 2x+1\rvert-4\right)$	**1,0**
	Dựa vào dấu của đạo hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có Điểm cực trị của $g(x)$ phải thoả mãn $\left[\begin{array}{l}\lvert 2x+1\rvert-4=2\\ \lvert 2x+1\rvert-4=3\\ 2x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}\\ x=-\dfrac{7}{2}\\ x=3\\ x=-4\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$	**1,0**
	Vì $g'(x)$ đổi dấu qua các điểm $-4;-\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2};3$ nên $g(x)$ có các điểm cực trị là $x=-4;x=-\dfrac{7}{2};x=-\dfrac{1}{2};x=\dfrac{5}{2};x=3$.	**1,0**
	b) (3,0 điểm)	
	Ta có, hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$. $f'\left(x\right)=6mx^2+6\left(m^2-7m+2\right)x-48\sqrt{x+1}-6\left(3m^2-12m-10\right),\ \forall x\in\left(-1;+\infty\right)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$. khi và chỉ khi $f'\left(x\right)\ge 0,\ \forall x\in\left(-1;+\infty\right)$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$. Do $f'\left(x\right)=6mx^2+6\left(m^2-7m+2\right)x-48\sqrt{x+1}-6\left(3m^2-12m-10\right),\ \forall x\in\left(-1;+\infty\right)$	**0,5**
	$f'\left(x\right)=6\left[mx^2+\left(m^2-7m+2\right)x-8\sqrt{x+1}-\left(3m^2-12m-10\right)\right],\ \forall x\in\left(-1;+\infty\right)$ $=6\left(x-3\right)\left[m^2+m\left(x-4\right)+\dfrac{2(x-3)}{x+5+4\sqrt{x+1}}\right],\forall x\in\left(-1;+\infty\right)$ Đặt $g\left(x\right)=m^2+m\left(x-4\right)+\dfrac{2(x-3)}{x+5+4\sqrt{x+1}},\forall x\in\left(-1;+\infty\right)$	**1,0**
	$f'\left(x\right)\ge 0,\ \forall x\in\left(-1;+\infty\right)$ thì $g\left(x\right)=m^2+m\left(x-4\right)+\dfrac{2(x-3)}{x+5+4\sqrt{x+1}}$ phải có nghiệm $x=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\end{array}\right.$.	**0,5**
	Thử lại. ta thấy $m=0(\text{tm}),m=1(\text{tm})$. Vậy $m=0,m=1$.	**1,0**

<table>
<tr><td rowspan="6">2
(5,0đ)</td><td colspan="2">a) (3,0 điểm)</td></tr>
<tr><td>
Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy M, N sao cho SM = SN=1.



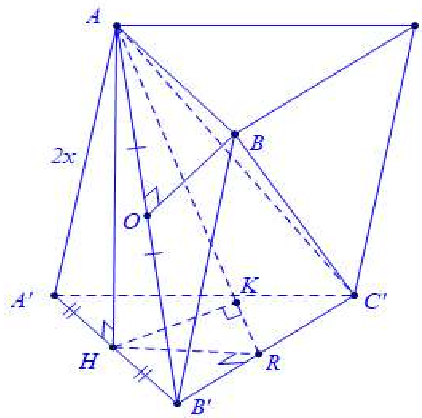
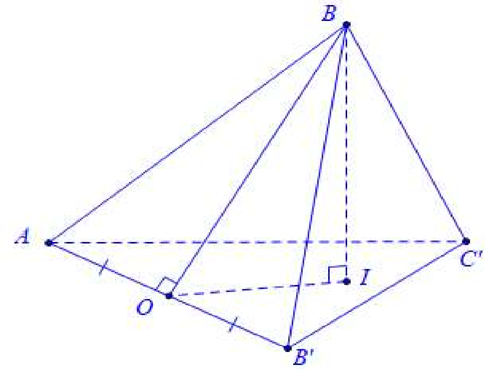
Tính được $V_{SAMN}=\frac{\sqrt{2}}{12}$
</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>


Mà $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{6} => V_{SABC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Chứng minh được: $V_{SABC}=\frac{1}{6}SA.BC.d(\text{SA, BC})\sin\varphi$, với φ là góc giữa SA và BC.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>
$BC^2=SB^2+SC^2-2SB.SC.\cos\widehat{BSC}=19 => \text{BC}=\sqrt{19}$.

Mà $cos\varphi=\left|\frac{\overrightarrow{SA}\overrightarrow{BC}}{SA.BC}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{SA}\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)}{SA.BC}\right|=\frac{1}{\sqrt{19}} => \sin\varphi=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$

Suy ra

$V_{SABC}=\frac{1}{6}.1.\sqrt{19}.d(\text{SA, BC}).\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} => \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{6}.1.\sqrt{19}.d(\text{SA, BC}).\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} => d(\text{SA, BC})=1.$
</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td colspan="2">b)(2,0 điểm) :</td></tr>
</table>

	Đặt $AA' = 2x, B'C' = y\ (x > 0,\ y > 0)$. Ta có $2x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 2x\ (0 < x < 3)$. Gọi AH là đường cao của tam giác $AB'A'$. Khi đó AH là đường cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có $AB' = (BAB') \cap (C'AB')$. Gọi I, O lần lượt là hình chiếu của điểm B trên mặt phẳng $(AB'C')$ và đường thẳng AB'. Khi đó: $AB' \perp (BOI) \Rightarrow AB' \perp OI$ suy ra góc φ là giữa hai mặt phẳng $(AB'B)$ và $(AB'C')$ là góc $\widehat{BOI}$ .Do tam giác $AB'A'$ đều nên ta có $BO = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}2x = \sqrt{3}x$.	0,5
	Ta có $BI = d(B,(AB'C')) = d(A',(AB'C')) = 2d(H,(AB'C'))$. Kẻ $HR \perp B'C', HK \perp AR \Rightarrow d(H,(AB'C')) = HK$. Ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HR^2} \Rightarrow HK = \frac{AH.HR}{\sqrt{AH^2 + HR^2}} = \frac{x\sqrt{3}.HR}{\sqrt{3x^2 + HR^2}}$. Từ đó ta có: $BI = \frac{2x\sqrt{3}.HR}{\sqrt{3x^2 + HR^2}}$.	0,5
	Ta có $\sin\varphi = \frac{BI}{BO} = \frac{2HR}{\sqrt{3x^2 + HR^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow HR = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(A', B'C') = 2HR = x\sqrt{3}$. Suy ra $S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}.d(A', B'C').B'C' = \frac{1}{2}x\sqrt{3}.(6-2x) \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AH.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{3}{2}x^2.(6-2x)$	0,5
	$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}x.x.(6-2x) \le \frac{3}{2}\left(\frac{x+x+6-2x}{3}\right)^3 = 12 < 24$.Điều phải chứng minh	0,5
3 **(5,0đ)**	**a) (3,0 điểm)**	
	Ta có $2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m\sqrt{x^2 + x + 1} + 2m = 2x^2 + m\sqrt{x^2 - x + 1} + 7$ $<=> m\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} + 2\right) = 2x^2 - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + 7$ $<=> m = \frac{2x^2 - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + 7}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} + 2}$ (1) Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$. Chứng minh được tập giá trị của t là $(-1;1)$.	1,5
	$pt(1) <=> m = \frac{t^2 + 5}{t + 2}$ (2)	1,5

Hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến trên $(-1;1)$ và $\lim\limits_{x->-1^{+}} f(t)=6,\ \lim\limits_{x->1^{-}} f(t)=2$

$YCBT <=> 2<m<6$

b) (2,0 điểm)

Vì tổng các số trên mỗi hàng và tổng các các số trên mỗi cột đều là các số lẻ nên trên mỗi hàng và trên mỗi cột đều có ba số lẻ hoặc hai số chẵn và một số lẻ.

Vì chỉ có 5 số lẻ: $1;3;5;7;9$ và có 4 số chẵn: $2;4;6;8$ nên có đúng một hàng được đặt toàn số lẻ và hai hàng còn lại thì mỗi hàng có hai số chẵn và một số lẻ; có đúng một cột được đặt toàn số lẻ và hai cột còn lại thì mỗi cột có hai số chẵn và một số lẻ;

Chọn một hàng có 3 cách.

Chọn 3 số lẻ trong 5 số lẻ: $1;3;5;7;9$ rồi sắp xếp vào 3 ô vuông của hàng vừa chọn có A_5^3 cách.

lẻ	lẻ	lẻ
chẵn	lẻ	chẵn
chẵn	lẻ	chẵn

1,0

Chọn một cột có 3 cách.

Có 3 ô vuông trong cột vừa chọn gồm một ô vuông đã được đặt số lẻ và hai ô vuông trống.

Sắp xếp 2 số lẻ còn lại vào 2 ô vuông trống đó có $2!$ cách.

Sắp xếp 4 số chẵn: 2;4;6;8 vào 4 ô vuông trống còn lại có $4!$ cách.

Vậy có $3.A_5^3.3.2!.4!$ cách đặt các viên bi đã cho để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ.

Đặt ngẫu nhiên hết các viên bi đánh số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ vào 9 ô vuông có $9!$ cách.

Xác suất để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ là: $\dfrac{3.A_5^3.3.2!.4!}{9!}=\dfrac{1}{14}$

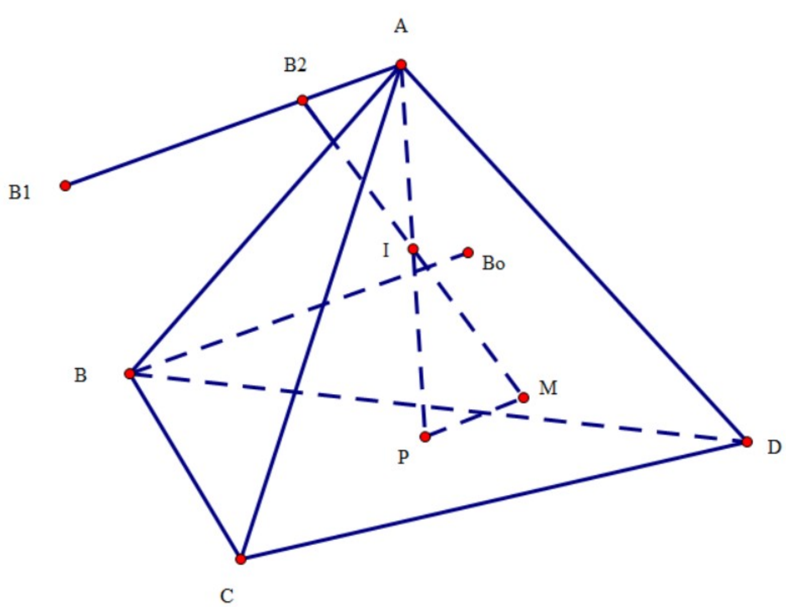
1,0

4 (2,0đ)

Gọi B_o, C_o, D_o thứ tự là hình chiếu của B lên (ACD), C lên (ADB), D lên (ABC).

Chứng minh được $\dfrac{PM}{BB_0}+\dfrac{PN}{CC_0}+\dfrac{PN}{DD_0}=1$

0,5



1,0

	Gọi B_1, C_1, D_1 là các điểm thoả mãn $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_oB}$, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{C_oC}$, $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{D_oD}$. Ta có B_1, C_1, D_1 cố định và $\frac{PM}{AB_1} + \frac{PN}{AC_1} + \frac{PN}{AD_1} = 1$. Gọi I là trung điểm của AP. Xét phép đối xứng tâm I biến P thành A, biến các điểm M, N, E thứ tự thành B_2, C_2, D_2 thứ tự thuộc AB_1, AC_1, AD_1. Khi đó $V_{PMNE} = V_{AB_2C_2D_2}$ và $\frac{AB_2}{AB_1} + \frac{AC_2}{AC_1} + \frac{AD_2}{AD_1} = 1$	
	$\frac{V_{AB_2C_2D_2}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB_2}{AB_1}.\frac{AC_2}{AC_1}.\frac{AD_2}{AD_1} \le \frac{1}{27}\left(\frac{AB_2}{AB_1} + \frac{AC_2}{AC_1} + \frac{AD_2}{AD_1}\right)^3 \Rightarrow V_{AB_2C_2D_2} \le \frac{V_{AB_1C_1D_1}}{27}$ (không đổi). Dấu đẳng thức xãy ra khi và chỉ khi P là trọng tâm tam giác BCD. Vậy thể tích tứ diện PMNE đặt giá trị lớn nhất khi P là trọng tâm tam giác BCD.	**0,5**
5 (2,0đ)	Ta chứng minh $P = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \ge -4$ $\Leftrightarrow -P = (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \le 4$ (*). Nếu $ab+bc+ca < 0$ thì $-P \le 0$ suy ra BĐT được chứng minh.	**0,5**
	Nếu $ab+bc+ca \ge 0$, đặt $ab+bc+ca = x \ge 0$ ta có : $(a-b)(b-c) \le \left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \le \frac{(a-c)^3}{4}$ (1) Ta có $4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ $= 2(a-c)^2 + 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 2(a-c)^2 + [(a-b)+(b-c)]^2$ $= 2(a-c)^2 + (a-c)^2 = 3(a-c)^2$ Suy ra $4(5-x) \ge 3(a-c)^2$,từ đây ta có $x \le 5$ và $a-c \le \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)}$ (2). Từ (1),(2) suy ra $-P \le \frac{1}{4}x.\sqrt{\left[\frac{4}{3}(5-x)\right]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$	**0,5**
	Lại có $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3}$ hàm số liên tục trên đoạn $[0;5]$. $f'(x) = \sqrt{5-x}(5-\frac{5}{2}x)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5; x = 2$. Ta có $f(2) = 6\sqrt{3}, f(0) = f(5) = 0$	**0,5**
	Vậy $\underset{x\in[0;5]}{Max} f(x) = f(2) = 6\sqrt{3}$. nên suy ra $-P \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.6\sqrt{3} \Rightarrow -P \le 4 \Rightarrow P \ge -4$. Vậy (*) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = 2;\ b = 1;\ c = 0$. Do đó $\text{MinP} = -4$ khi $a = 2;\ b = 1;\ c = 0$	**0,5**

--- Hết ---

Ghi chú: *Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa*