

Môn: Toán

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày 17 tháng 3 năm 2023

(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)

Số báo danh

Câu 1: (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$.

a) Rút gọn P. b. Tìm x để $\frac{1}{P} - \frac{x+1}{8} \geq 1$.

2. Cho ba số thực a, b, c khác không thỏa mãn $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -2$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $x^3 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 + 3\frac{x^2}{x-1} = 28$.

2. Tìm các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn các điều kiện: $2x + y + \frac{1}{y} + \frac{2}{x} = 6$ và $xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4$.

Câu 3: (4,0 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình: $(xy + x + 1)^2 + xy = x^2 - 3x$.

2. Cho a, b là các số tự nhiên lớn hơn 2 và p là số tự nhiên thỏa mãn $\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Chứng minh rằng p là hợp số.

Câu 4: (6,0 điểm)

1. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Gọi O là trung điểm của AB . Dựng các tia Ax, By về cùng một phía của AB sao cho Ax, By lần lượt vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C , trên tia By lấy điểm D sao cho $\angle COD = 90^\circ$.

a. Chứng minh $AC \cdot BD = a^2$ và $CD = AC + BD$.

b. Kẻ OM vuông góc với CD tại M , gọi N là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng $MN \parallel AC$.

2. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn là CD . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Một đường thẳng cắt các đoạn AD, OD, OC, BC lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $MN = NP = PQ$. Chứng minh rằng $CD = 2AB$.

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + xz = 3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{y^2}{x(y^2 + 1)} + \frac{z^2}{y(z^2 + 1)} + \frac{x^2}{z(x^2 + 1)}$.

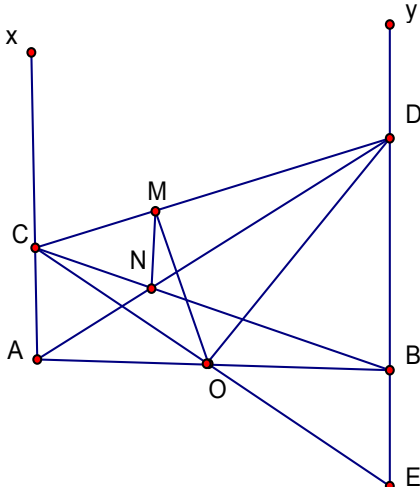
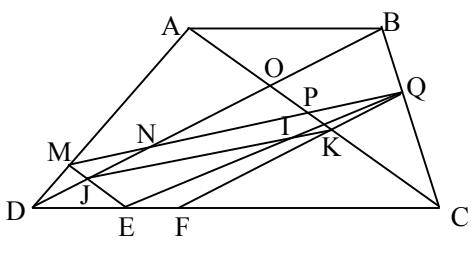
----- Hết -----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4,0đ)	1.	2,5đ
	* ĐKXD: $x \neq -2, x \neq \pm 1$. Ta có:	0.25
	$P = \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right).$	
	$= \left(\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} \right) : \left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} \right)$	0.25
	$= \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x-1} \right) : \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$	0.5
	$= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{2x}$	
	$= \frac{x+1}{2x}$	0.25
	Vậy với $x \neq -2, x \neq \pm 1$ thì $P = \frac{x+1}{2x}$.	0.25
	+ Ta có: $\frac{1}{P} - \frac{x+1}{8} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{8} - 1 \geq 0$	
	$\Leftrightarrow \frac{16x}{8(x+1)} - \frac{(x+1)^2}{8(x+1)} - \frac{8(x+1)}{8(x+1)} \geq 0$	
	$\Leftrightarrow \frac{16x - (x+1)^2 - 8(x+1)}{8(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{x+1} \leq 0 \quad (1)$	0.5
	+ Nếu: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow (1)$ luôn đúng với $x \neq -2, x \neq \pm 1$.	0.25
	+ Nếu: $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \Rightarrow (x-3)^2 > 0 \forall x$.	
	$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$	0.25
	Vậy với $x < -1 \cup x = 3$ thì $\frac{1}{P} - \frac{x+1}{8} \geq 1$.	
	2.	1,5đ
	Ta có: $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -2$	
	$\Leftrightarrow \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{abc} = -2$	0,25
	$\Rightarrow a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2abc = 0$	
	$\Leftrightarrow ab(a+b) + c(a+b)^2 + c^2(a+b) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(ab + ac + bc + c^2) = 0$	
	$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$	0,5
		0,25

	- Xét $a = -b$. Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow c = 1$. Suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. - Xét $b = -c$. Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow a = 1$. Suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ - Xét $c = -a$. Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow b = 1$. Suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ Vậy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ khi a, b, c khác không thỏa mãn: $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -2 \text{ và } a^3 + b^3 + c^3 = 1.$	0,25
		0,25
	1.	2đ
	+ Điều kiện: $\forall x \neq 1$ + Ta có:	0,25
	$x^3 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 = \left(x + \frac{x}{x-1}\right)^3 - 3x \cdot \frac{x}{x-1} \left(x + \frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2$	0,5
	Khi đó phương trình đã cho trở thành	0,5
	$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 + 3\frac{x^2}{x-1} - 1 = 27 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1} - 1\right)^3 = 3^3$	
	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$	0,5
	KL: $x=2$	0,25
	2.	2đ
2 (4,0đ)	+ Ta có: $\begin{cases} 2x^2y + y^2x + x + 2y = 6xy & (1) \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 6 \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) = 6 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 4 \end{cases}$ + Đặt $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = a \\ y + \frac{1}{y} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 6 \\ ab = 4 \end{cases}$	0,5

	+ Giải hệ trên ta có: $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$	0,5
	$\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$	0,5
	+ Với $\begin{cases} x+\frac{1}{x}=2 \\ y+\frac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$	0,5
	+ Với $\begin{cases} x+\frac{1}{x}=1 \\ y+\frac{1}{y}=4 \end{cases} (VN)$ KL Cặp số $(x; y) = (1; 1)$	
3 (4,0đ)	1.	2đ
	+ Biến đổi $(xy+x+1)^2 + xy = x^2 - 3x$ $\Leftrightarrow (xy+x+1)^2 + xy + x + 1 = x^2 - 2x + 1$	0,25
	$\Leftrightarrow (xy+x+1)[(xy+x+1)+1] = (x-1)^2 \Leftrightarrow (xy+x+1)(xy+x+2) = (x-1)^2 \quad (1)$	0,5
	+ Nếu $x-1=0 \Rightarrow x=1$ thay vào (1) tìm được $y=-2; y=-3$	0,25
	+ Nếu $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$: Khi đó VT(1) là tích hai số nguyên liên tiếp, VP(1) là bình phương của số nguyên khác 0. Nên phương trình vô nghiệm.	0,5
	KL : Các số x, y nguyên thỏa mãn điều kiện bài toán là: $(x; y) \in \{(1, -2); (1, -3)\}$.	0,5
	2.	2đ
	+ Giả sử p là số nguyên tố. Từ: $a^2b^2 = p(a^2+b^2) \Rightarrow \begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases} \quad (1)$	0,5
	$\Rightarrow a^2b^2 : p^2 \Rightarrow p(a^2+b^2) : p^2 \Rightarrow a^2+b^2 : p \quad (2)$	0,5
	+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow a:p$ và $b:p$ + Từ $a \geq p, b \geq p \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq \frac{2}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{2}{p^2} \Rightarrow p \leq 2 \quad (3)$	0,5
	+ Từ $a > 2, b > 2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow p > 2 \quad (4)$	0,25
	+ Từ (3), (4) $\Rightarrow$ mâu thuẫn, chứng tỏ p là hợp số.	0,25

4 (6,0đ)	1.  a. $\triangle ACO$ và $\triangle BOD$ có: $\angle CAO = \angle OBD (= 90^\circ)$ $\angle AOC = \angle BDO$ (cùng phụ với $\angle BOD$) Do đó: $\triangle ACO \sim \triangle BOD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{BO} = \frac{AO}{BD} \Rightarrow AC \cdot BD = AO \cdot BO = a^2$	0,25 0,25 0,5
	* Kéo dài CO cắt tia đối của By tại E. $\triangle AOC = \triangle BOE$ (g.c.g) $\Rightarrow CO = EO; AC = BE$ (các cạnh tương ứng) $\Rightarrow$ tam giác DCE cân tại D (vì có đường cao DO đồng thời là trung tuyến) $\Rightarrow DC = DE$ + Mà $DE = BE + BD = AC + BD$ hay $CD = AC + BD$.	0,25 0,25 0,25 0,25
	b. Ta có: $\triangle ODM \sim \triangle ODB$ (g.g) $\Rightarrow MO = BO \Rightarrow MO = AO$ $\Rightarrow \triangle ACO = \triangle MCO$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow MC = CA$ + Chứng minh tương tự ta có: $MD = BD$. + Xét hai tam giác CAN và BDN. Có $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{AC}{BD}$ (Hệ quả Định lý Ta-let) hay $\frac{AN}{ND} = \frac{CM}{MD}$ ($MC = CA; MD = BD$) $\Rightarrow MN \parallel AC$ (Định lý Ta-let đảo).	0,25 0,5 0,25 0,5 0,5
	2. 	

	+ Gọi O là giao điểm của AC và BD. + Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt DC tại E. + Qua Q kẻ đường thẳng song song với BD cắt DC tại F. + ME cắt BD tại J, QF cắt CA tại K. - Ta có: $\frac{MJ}{AO} = \frac{DJ}{DO} = \frac{JE}{OC} \Rightarrow \frac{MJ}{JE} = \frac{OA}{OC}$ $\frac{KQ}{OB} = \frac{CK}{CO} = \frac{KF}{OD} \Rightarrow \frac{QK}{KF} = \frac{OB}{OD}$ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{MJ}{JE} = \frac{QK}{KF}$ + Mặt khác: $\frac{NM}{NP} = \frac{NJ}{NO} = 1; \frac{PK}{PO} = \frac{PQ}{PN} = 1$ $\Rightarrow N, P$ lần lượt là trung điểm của OJ và OK $\Rightarrow NP // JK$. + Nếu E không trùng với F. Nối QE cắt JK tại I, ta có: $\frac{KQ}{KF} = \frac{JM}{JE} = \frac{IQ}{IE} \Rightarrow KI // EF \Rightarrow MQ // DC \text{ (không đúng với gt)}$ $\Rightarrow E$ trùng với F $\Rightarrow I \equiv K \Rightarrow NP = \frac{1}{2} IJ$. + Ta có: $\Rightarrow I \equiv K \Rightarrow IJ = \frac{2}{3} MQ \Rightarrow \frac{JE}{JM} = 2 \Rightarrow \frac{OC}{OA} = 2 \Rightarrow CD = 2AB$.	0,5 0,5 0,5 0,5
5 (2,0đ)	Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$; ta có: a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$. Khi đó: $A = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}$ Ta có: $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \Rightarrow \frac{a}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2}$ (1) Tương tự: $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}$ (2); $\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ac}{2}$ (3). Cộng vế tương ứng của (1), (2) và (3), ta được: $A = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \frac{ab+bc+ca}{2}$ Ta lại có: $(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow 3 \geq ab + bc + ca$. Từ đó $A \geq 3 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow A \geq \frac{3}{2}$ Dấu “=” xảy ra, khi và chỉ khi: $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$ Vậy, $\min A = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$	0,25 0,5 0,25 0,25 0,5 0,25

Chú ý:

1. Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.
2. Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.