PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH

TOANMATH.com

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG TỈNH
NĂM HỌC 2022-2023.
Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1(3 điểm).

a) Tìm số nguyên tố p để $2^p + 1 \vdots p$

b) Cho $x, y \in Z$ thỏa mãn $x.y = 2023^{2022}$. Chứng minh $x^{2022} - y^{2022} \vdots 24$

Câu 2(6 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^3+8} + x = \frac{2}{3}\left(x^2+5\right)$

b) $\sqrt{x^3+1} - 3x = \sqrt{x^3-4} - 5$

Câu 3(2 điểm).

a)Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} \ge \frac{1}{a^2+bc}$

b) Cho $a, b, c > 0$ và $a < 1; b < 2; c < 3$ thỏa mãn $\left(\frac{1}{a}-1\right).\left(\frac{2}{b}-1\right).\left(\frac{3}{c}-1\right) = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{9}$

Câu 4(7 điểm).

Cho ΔABC nhọn, các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Trên tia đối của tia EB lấy điểm P, trên tia đối của tia FC lấy điểm Q sao cho $\widehat{APC} = \widehat{AQB} = 90^0$

a) Chứng minh: ΔAPQ cân tại A
b) Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H và vuông góc với HI cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh: HM = HN
c) Gọi O là giao điểm các đường phân giác của ΔABC. Chứng minh: $\frac{OA}{\sqrt{bc}} + \frac{OB}{\sqrt{ac}} + \frac{OC}{\sqrt{ab}} + \frac{abc}{OA.OB.OC} \ge 4\sqrt{3}$ với $AB = c; AC = b; BC = a$

Câu 5(2 điểm).

Cho hình chữ nhật và 2022 đường thẳng. Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối diện của hình chữ nhật và chia hình chữ nhật thành hai tứ giác có tỉ lệ diện tích là 2022:2023. Chứng minh rằng trong số 2022 đường thẳng trên có ít nhất 506 đường thẳng cùng đi qua một điểm

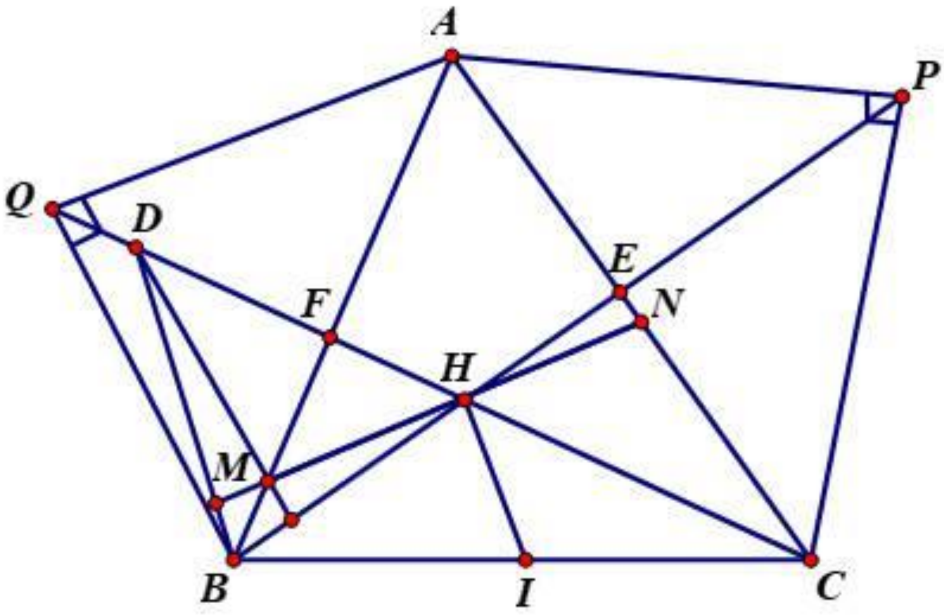
Hết./.

Học sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

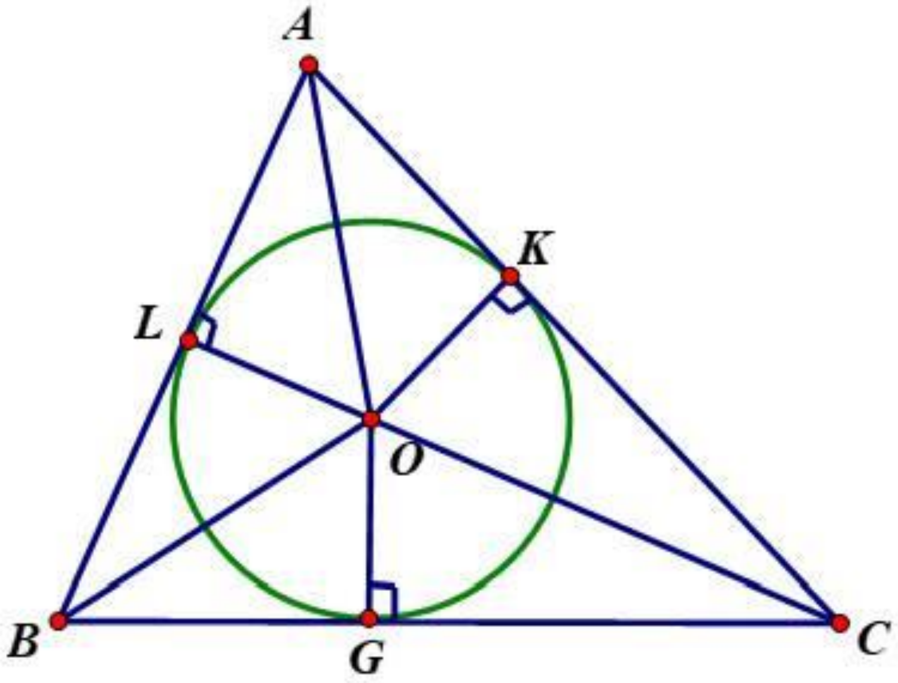
KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG TỈNH NĂM HỌC 2022-2023
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

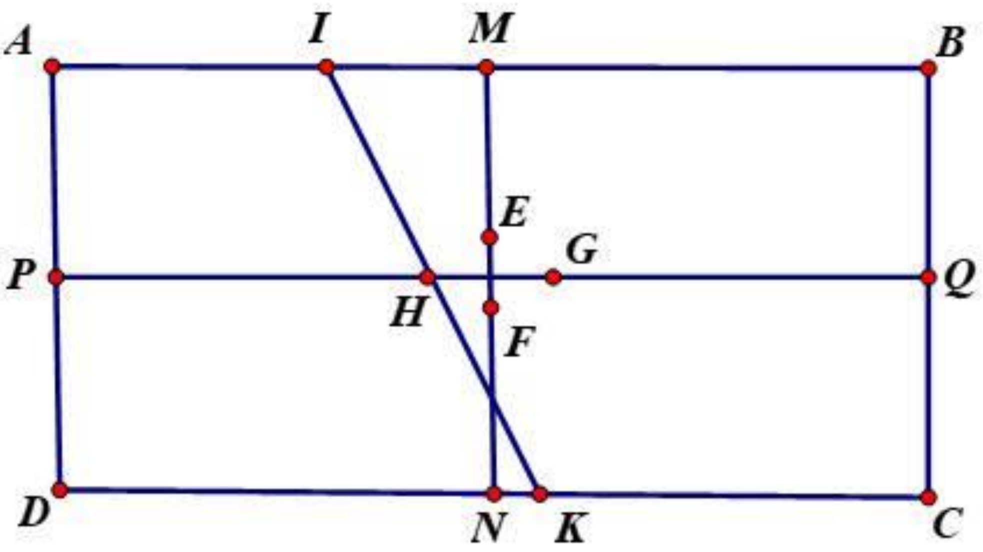
Câu	Nội dung	Điểm
1. 3đ	a)Tìm số nguyên tố p để $2^p+1\vdots p$ Theo đ lí Fecma ta có $2^p-2\vdots p$ mà $2^p+1\vdots p\Rightarrow\left[\left(2^p+1\right)-\left(2^p-2\right)\right]\vdots p$ $\Rightarrow 3\vdots p\Rightarrow p=3$	0,5 0,5 0,5
	b)Cho $x,y\in Z$ thỏa mãn $x.y=2023^{2022}$. Chứng minh $x^{2022}-y^{2022}\vdots 24$ Vì $xy=2023^{2022}$ không chia hết cho 3, nên x,y lẻ không c/hết cho 3 Nhận thấy $x^{2022}-1=\left(x^2\right)^{1011}-1^{1011}\vdots x^2-1$ mà $x^2-1=(x-1).(x+1)\vdots 8$ Và $(x-1).x.(x+1)\vdots 3\Rightarrow(x-1).(x+1)\vdots 3$ vì x không chia hết cho 3 Nên $(x-1).(x+1)\vdots 24\Rightarrow x^2-1\vdots 24\Rightarrow x^{2022}-1\vdots 24$ tương tự $y^{2022}-1\vdots 24$ $\Rightarrow\left(x^{2022}-1\right)-\left(y^{2022}-1\right)\vdots 24\Rightarrow x^{2022}-y^{2022}\vdots 24$	0,5 0,5 0,5
2. 6 đ	a) (3đ) $\sqrt{x^3+8}+x=\frac{2}{3}\left(x^2+5\right)$. Đkxđ $x\ge -2$ $\sqrt{x^3+8}+x=\frac{2}{3}\left(x^2+5\right)\Leftrightarrow 3\sqrt{(x+2).\left(x^2-2x+4\right)}=2\left(x^2-2x+4\right)+(x+2)$ Đặt $a=\sqrt{x+2};b=\sqrt{x^2-2x+4}$ Pt trở thành $3ab=a^2+2b^2\Leftrightarrow(a-b).(a-2b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b(1)\\a=2b(2)\end{array}\right.$ Giải (1). $\Rightarrow\sqrt{x+2}=\sqrt{x^2-2x+4}\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x_1=1;x_2=2(t/m)$ Giải(2). $\Rightarrow\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-2x+4}\Leftrightarrow 4x^2-9x+14=0$ pt vô nghiệm Vậy pt có 2 nghệm là $x_1=1;x_2=2$	0,25 0,5 0,25 0,75 0,5 0,5 0,25
	b)(3đ) $\sqrt{x^3+1}-3x=\sqrt{x^3-4}-5$ đk: $x\ge\sqrt[3]{4}$ $\sqrt{x^3+1}-3x=\sqrt{x^3-4}-5\Leftrightarrow\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-4}=3x-5$ $\Leftrightarrow\frac{5}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-4}}=3x-5(*)$ - Nếu $\sqrt[3]{4}\le x<2\Rightarrow VT>1$ mà $VP<1$. Nên PT (*) vô nghiệm	0,25 0,5 0,5 0,5

	- Nếu x = 2 Thì thỏa mãn PT (*). Nên x = 2 là nghiệm - Nếu $x>2 \Rightarrow VT<1$ mà $VP>1$. Nên PT (*) vô nghiệm Vậy PT có nghiệm x = 2	0,5 0,5 0,25
4 2 đ	a)(1đ). Cho $a,b,c>0$. Chứng minh $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\ge\frac{1}{a^2+bc}$ Theo Bunhia ta có $\left(a^2+\sqrt{bc}^2\right).\left(1+\sqrt{\frac{b}{c}}^2\right)\ge(a+b)^2 \Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2}\ge\frac{1}{(a^2+bc)}.\frac{c}{b+c}$ (1) Tương tự ta có $\frac{1}{(a+c)^2}\ge\frac{1}{(a^2+bc)}.\frac{b}{b+c}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\ge\frac{1}{a^2+bc}$	 0,5 0,25 0,25
	b)Cho $a,b,c>0$ và $a<1;b<2;z<3$ thỏa mãn $\left(\frac{1}{a}-1\right).\left(\frac{2}{b}-1\right).\left(\frac{3}{c}-1\right)=1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=a^2+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{9}$ Đặt $\frac{1}{a}-1=x \Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{1}{1+x};\frac{2}{b}-1=y \Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{1}{1+y};\frac{3}{c}-1=z \Rightarrow \frac{c}{3}=\frac{1}{1+z}$ $\Rightarrow xyz=1$ và $x,y,z>0$ $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\ge\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}$ Ta có $(z-1)^2\ge0 \Leftrightarrow 4\left[\left(z^2+z\right)+1\right]\ge3(z+1)^2 \Leftrightarrow \frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\ge\frac{3}{4}$ Vậy GTNN của P = $\frac{3}{4}$ khi x=y=z=1 và a=1/2; b=1 và c=3/2	 0,25 0,25 0,25 0,25
4 7đ	Cho ΔABC nhọn, các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Trên tia đối của tia EB lấy điểm P, trên tia đối của tia FC lấy điểm Q sao cho $\widehat{APC}=\widehat{AQB}=90^0$	

<table>
<tr><td></td><td>


</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
a) Chứng minh: ΔAPQ cân tại A
Chứng minh được : AF.AB =AE.AC
AF.AB = AQ^2 và AE.AC = AP^2
=>$AQ^2 = AP^2$ => AQ = AP => ΔAPQ cân tại A
</td><td>1
0,5
1</td></tr>
<tr><td></td><td>
b)Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H và vuông góc với HI cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh: HM = HN
Gọi D là điểm đối xứng với C qua H
=> HI là đường trung bình của ΔBCD
=> $BD \perp HM$ => M là trực tâm $\Delta BDH \Rightarrow DM \perp BE \Rightarrow DM//CN$
$\Rightarrow \frac{HM}{HN} = \frac{DH}{CH} \Rightarrow HM = HN$
</td><td>0,5
0,5
1
0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>
c) Gọi O là giao điểm các đường phân giác của ΔABC . C/ minh:
$\frac{OA}{\sqrt{bc}} + \frac{OB}{\sqrt{ac}} + \frac{OC}{\sqrt{ab}} + \frac{abc}{OA.OB.OC} \geq 4\sqrt{3}$ với $AB = c;\ AC = b;\ BC = a$
</td><td></td></tr>
</table>

		
	$\frac{S_{\Delta ALK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AL.AK.SinA}{AB.AC.SinA} = \frac{AL^2}{b.c}$ và $\frac{S_{\Delta OLK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{OL.OK.SinI}{AB.AC.SinA} = \frac{OL^2}{b.c}$	
	$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ALK} + S_{\Delta OLK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AO^2}{b.c} \Rightarrow \frac{S_{\Diamond ALOK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AO^2}{b.c}$	0,5
	Tương tự ta có $\frac{S_{\Diamond BLOG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BO^2}{a.c}$ và $\frac{S_{\Diamond CGOK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{CO^2}{b.a}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{AO^2}{b.c} + \frac{BO^2}{a.c} + \frac{CO^2}{a.b} = 1$	0,25
	. Đặt $m = \frac{AO}{\sqrt{bc}}; n = \frac{BO}{\sqrt{ac}}; p = \frac{CO}{\sqrt{ac}} \Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 = 1 \Rightarrow mnp \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$	0,25
	Ta có: $m + n + p + \frac{1}{9mnp} \ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{9}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$	0,25
	Lại có $mnp \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{mnp} \ge 3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{8}{9mnp} \ge \frac{8}{\sqrt{3}}$	0,25
	$m + n + p + \frac{1}{mnp} \ge \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{OA}{\sqrt{bc}} + \frac{OB}{\sqrt{ac}} + \frac{OC}{\sqrt{ab}} + \frac{abc}{OA.OB.OC} \ge 4\sqrt{3}$	
	Dấu "=" xảy ra khi $m = n = p = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$	0,25
5 2đ	Cho hình chữ nhật và 2022 đường thẳng. Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối diện của hình chữ nhật và chia hình chữ nhật thành hai tứ giác có tỉ lệ diện tích là 2022:2023. Chứng minh rằng trong số 2022 đường thẳng trên có ít nhất 506 đường thẳng cùng đi qua một điểm	

		
	Giả sử Hình chữ nhật là ABCD với M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,CD,AD và BC.	0,25
	Giả sử trong 2022 đường thẳng trên có đường cắt AB tại I và cắt DC tại K, IK cắt PQ tại H	0,25
	Theo bài ra ta có $\frac{S_{QADKI}}{S_{QBCKI}}=\frac{PH}{HQ}\Rightarrow\frac{PH}{HQ}=\frac{2022}{2023}$ => H cố định trên PQ	0,5
	Vậy trong 2022 đường trên luôn đi qua 1 trong 4 điểm H,E,G,F với E, F trên MN sao cho $\frac{ME}{EN}=\frac{NF}{FM}=\frac{2022}{2023}$	0,25 0,25
	Và H, G trên PQ sao cho $\frac{PH}{HQ}=\frac{GQ}{GP}=\frac{2022}{2023}$.	0,25
	Nên có ít nhất $[2022:4]+1+506$ đường thẳng cùng đi qua một điểm	0,25