SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 04/10/2023
Thời gian làm bài: **180 phút,** *không kể thời gian phát đề*

Câu 1 *(5,0 điểm)*

Tìm số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$9(a^3+b^3+c^3)-8 \geq k(8-6ab-6bc-6ca)$$

đúng với mọi bộ số thực dương (a,b,c) thỏa mãn $a+b+c=2$.

Câu 2 *(5,0 điểm)*

Với tham số thực k, xét hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(f(x)-f(y)\big)=f(xy)-xf(y)+ky \text{ với mọi } x,y \in \mathbb{R}.$$

a) Với $k=0$, tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện đã cho.

b) Tìm tất cả các giá trị k sao cho tồn tại ít nhất hai hàm số f thỏa mãn điều kiện đã cho.

Câu 3 *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc BC, AB lần lượt tại D, F. Gọi H, Y, Z lần lượt là trực tâm của tam giác ABC, AIC, AIB.

a) Chứng minh rằng CI, DF, AY đồng quy.

b) Chứng minh rằng D, Y, Z thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng AH đi qua trung điểm của YZ.

Câu 4 *(5,0 điểm)*

Cho đa thức $P(x)=x^{22}+x^{21}+\cdots+x+1$, số nguyên dương m chia hết cho 23 và ước nguyên tố q của $P(m)$.

a) Chứng minh rằng $m(m-1)$ không chia hết cho q.

b) Chứng minh rằng $q-1$ chia hết cho 23.

c) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn $p>2023^{2024}$ và $p-1$ chia hết cho 23.

------------------ HẾT ------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 05/10/2023
Thời gian làm bài: **180 phút**, *không kể thời gian phát đề*

Câu 1 *(5,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3} + \frac{u_n^2}{3n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng $u_{2023} > \frac{1}{2023!}$.

b) Chứng minh rằng các dãy số (u_n) và $(\sqrt[n]{u_n})$ có giới hạn hữu hạn, tìm các giới hạn đó.

Câu 2 *(5,0 điểm)*

a) Tồn tại hay không đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn

$$P(20 + \sqrt[3]{24}) = 20 - \sqrt{23}.$$

b) Tồn tại hay không đa thức hệ số nguyên $Q(x)$ thỏa mãn

$$Q(20 + \sqrt{23}) = 20 - \sqrt{23} \text{ và } Q(20 + \sqrt[3]{24}) = 20 + 2\sqrt[3]{24}.$$

Câu 3 *(5,0 điểm)*

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Giả sử tia AB cắt tia DC tại E, tia BC cắt tia AD tại F, đường thẳng AC cắt đường thẳng EF tại G. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AEG cắt lại (O) tại K khác A.

a) Chứng minh rằng đường thẳng KD đi qua trung điểm I của EF.

b) Giả sử đường thẳng EF lần lượt cắt đường thẳng BD, đường tròn ngoại tiếp tam giác IAC tại H, J $(J \neq I)$. Chứng minh rằng $OH = OJ$.

Câu 4 *(5,0 điểm)*

Với mỗi tập hợp hữu hạn X, ta kí hiệu $|X|$ là số phần tử của X.

a) Cho A, B là hai tập con hữu hạn khác rỗng của $\mathbb{R}$. Xét tập

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Chứng minh rằng $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

b) Xét tập $S_{2023} = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq 2023\}$. Cho T là tập con của S_{2023} thỏa mãn

$$a + b + c \neq 0 \text{ với mọi } (a, b, c) \in T^3.$$

Giá trị lớn nhất có thể của $|T|$ là bao nhiêu?

---------------- HẾT ----------------