

Câu 1: (5,0 điểm) Cho dãy số (x_n) dương sao cho
$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ \frac{x_{n-1}x_{n+1}}{x_n^2} + \frac{n(n+1)x_{n+1}^2}{x_{n-1}x_n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Xác định công thức số hạng tổng quát của (x_n) .

b) Đặt $u_n = \frac{1}{e} \sum_{i=1}^n x_i$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{(n+1)!}$.

Câu 2: (5,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương lẻ (a, b) , $a, b < 2^{2023}$ thỏa mãn $a^b + b \cdot 2^{2023}$ và $b^a + a \cdot 2^{2023}$.

Câu 3: (5,0 điểm) Tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp (O) , đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại K . Điểm Q nằm trên đường tròn (O) sao cho $AQ \perp QK$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAQH cắt AC, AB lần lượt tại Y, Z . Gọi T là giao điểm của BY và CZ , P là giao điểm của YZ và BC .

a) Chứng minh rằng $\frac{PZ}{PY} = \frac{BH}{HC}$.

b) Chứng minh rằng $TH \perp KA$.

Câu 4: (5,0 điểm) Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2 + \frac{1}{a+b+c}.$$

----- HẾT -----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUNG YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỶ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP QUỐC GIA
NĂM HỌC 2023 - 2024**

Môn thi: TOÁN

*Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 01 trang, gồm 03 câu)*

Ngày thi thứ hai: 29/8/2023

Câu 1. (6,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y)) + f(y^{2023}f(x)) = xy + xy^{2023}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Câu 2. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F . Biết AI cắt BC tại S và cắt (O) tại điểm thứ hai là M . Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BSM, CSM cắt ME, MF tương ứng tại K và L (K, L khác M).

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, L, S, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi T là giao điểm thứ hai của MD với (O) . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với (O) .

Câu 3. (7,0 điểm)

Cô giáo có tất cả 2278 viên kẹo thuộc về k loại kẹo khác nhau. Cô chia cho các học sinh của mình mỗi người một số viên kẹo và không có học sinh nào nhận nhiều hơn một viên kẹo ở cùng một loại kẹo. Cô yêu cầu hai học sinh khác nhau bất kỳ so sánh các viên kẹo mình nhận được và viết số loại kẹo mà cả hai cùng có lên bảng. Biết rằng mỗi cặp học sinh bất kỳ đều được lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là M . Xác định giá trị nhỏ nhất của M trong mỗi trường hợp sau:

a) $k = 67$.

b) $k = 68$.

----- HẾT -----