

Câu 1 (3,0 điểm).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm).

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$

$$y = |1 + 2 \cos x| + |1 + 2 \sin x|$$

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 0; u_2 = 2; u_n = 6u_{n-1} - 8u_{n-2}, n \geq 3$.

a. Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) .

b. Gọi (v_n) là dãy số sau cho $v_1 = 1; v_n = u_n \cdot v_{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Chứng minh rằng v_n luôn luôn là bội của n với mọi n .

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho đa thức $P(x) = x^n + 4, n \in \mathbb{N}$.

a. Với $n = 4$ hãy phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các đa thức với các hệ số đều là số nguyên.

b. Tìm tất cả các giá trị n nguyên dương sao cho đa thức $P(x)$ phân tích được thành tích của hai đa thức khác hằng số với hệ số là các số nguyên.

Câu 5 (5,0 điểm).

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = y + [f(x)]^2; \forall x; y \in \mathbb{R} (*)$$

a. Tính $f(0)$.

b. Tìm tất cả các hàm số f thỏa điều kiện $(*)$.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

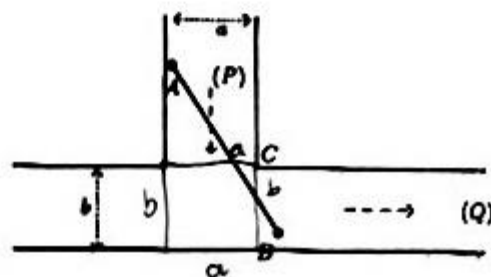
Câu 6 (5,0 điểm).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^5 + y^5 + z^5 = -32 \end{cases}$$

Câu 7 (5,0 điểm).

Hai kênh dẫn nước (P) và (Q) vuông góc nhau (như hình vẽ) chiều rộng của hai kênh lần lượt là a và b . Một thanh gỗ AB có thiết diện không đáng kể nổi trên mặt nước và trôi từ kênh (P) sang kênh (Q). Tìm độ dài lớn nhất của thanh gỗ AB sao cho thanh gỗ trôi qua được từ kênh (P) sang kênh (Q).



Câu 8 (5,0 điểm).

Tính theo n số các điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy có tọa độ $(x; y)$ với $x; y$ đều là số nguyên thỏa mãn $|x| + |y| \leq n$ với n là số tự nhiên cho trước.

Câu 9 (5,0 điểm).

Cho lục giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có diện tích bằng 1 và có các cặp cạnh đối diện song song, hai đường thẳng $A_6A_1; A_2A_3$ cắt nhau tại các điểm B_1 , hai đường thẳng $A_1A_2; A_3A_4$ cắt nhau tại điểm B_2 ; ...; tương tự $A_{i-1}A_i; A_{i+1}A_{i+2}$ cắt nhau tại điểm B_i , $i = 1 \dots 6$ (xem A_7 là A_1 và A_8 là A_2). Chứng minh rằng tổng diện tích sáu tam giác $A_iB_iA_{i+1}$; $i = 1 \dots 6$ không bé hơn 1.

—————Hết—————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay