

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{5 - u_n}$ ($n \geq 1$).

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Đặt $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - 3}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{5n + 4}$.

Câu 2. (5,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ca+1} + \frac{b}{ab+1} + \frac{c}{bc+1} \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) , có đường cao AH và tâm đường tròn nội tiếp là I . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua tâm O . Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K .

a) Chứng minh tứ giác $NHIK$ nội tiếp đường tròn.

b) Đường thẳng $A'I$ cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai D , hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S . Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS .

Câu 4. (5,0 điểm)

Chứng minh rằng nếu số tự nhiên m có dạng $4k+1$ với $(k > 0)$ mà biểu diễn được không ít hơn hai cách dưới dạng tổng hai số chính phương thì m là hợp số.

----- Hết -----

Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 19/9/2021

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

Câu 5. (6,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x + f(x) + y) = f(2x) + f(y); \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Câu 6. (7,0 điểm)

Với số nguyên dương N cho trước, trên bảng có viết tất cả các ước nguyên dương của N . Hai bạn An và Bình chơi một trò chơi với luật như sau: An đi đầu tiên và xóa số N , ở mỗi lượt tiếp theo, các bạn sẽ xóa số là ước hoặc bội của số mà người kia xóa ở lượt trước đó. Ai đến lượt đi của mình mà không thực hiện được nữa thì thua.

- Với $N = 2022$, chứng minh rằng Bình có cách chơi để thắng.
- Tìm số N nhỏ nhất và $N > 2022$ sao cho An có cách chơi thắng.

Câu 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF và hai đường trung trực của MC, NB cắt nhau tại điểm P .

- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tiếp xúc với (I) .
- Gọi Q là giao điểm của PM và AC . Chứng minh rằng Q thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC .
- Gọi J đối xứng với D qua P . Chứng minh rằng J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC .

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.