

Khóa ngày:

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

(Không kể thời gian phát đề)

ĐỀ:

(Đề thi có 01 trang/20 điểm)

Bài 1: Cho x, y là các số thực dương và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(x^n + y^n)(x + y)^{2n+1} \geq 2^{2n+1} x^n y^n (x^{n+1} + y^{n+1}).$$

Bài 2: Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi:

$$x_0 = 2021, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{\sqrt{3x_n^2 - 1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 3: Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x), Q(x)$ khác đa thức hằng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i) $P(1) = P(2) = Q(0)$;

(ii) $P(Q(x)) = P(x)Q(x) - 4Q(x) + P(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4: Cho đường tròn (O) tâm O và đường tròn (O') tâm O' tiếp xúc trong tại M , (O') nằm trong (O) . Gọi A là một điểm nằm trên (O) sao cho A, O, O' không thẳng hàng. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O') , trong đó B, C là các tiếp điểm. Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AB, AC với đường tròn (O) .

1) Chứng minh rằng $\frac{ME}{MF} = \frac{BE}{CF}$.

2) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO' và đường tròn (O) . Chứng minh rằng các đường thẳng BC, EF, MN đồng quy.

Bài 5: Cho số nguyên tố $p > 3$.

1) Giả sử $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{m}{n}$, với m và n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng m chia hết cho p .

2) Chứng minh rằng $C_{5p-1}^{p-1} - 1$ chia hết cho p^3 .

----- HẾT -----