SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUỐC GIA
Khóa ngày 19/12/2021
Môn : TOÁN
Thời gian làm bài 180 phút, không kể thời gian phát đề

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (4,0 *điểm*).

Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3\sqrt{2}x + 9} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 16} = 5$

Câu 2 (4,0 *điểm*).

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ta luôn có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$$

b) Gọi $x_n \in (0;1)$; $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ là nghiệm nếu có của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} = 0$$

Chứng minh rằng x_n luôn tồn tại với mọi số n; xét tính hội tụ và tính giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu có.

Câu 3 (4,0 *điểm*).

Có 10 đồng tiền đặt liên tiếp thành một hàng ngang, mỗi đồng tiền có một mặt sấp và một mặt ngửa, lúc đầu tất cả đều hiển thị ngửa. Trong mỗi nước đi, người ta lật hai đồng tiền liền kề với điều kiện cả hai mặt đều ngửa hoặc cả hai đều sấp. Hỏi sau một số nước đi ta có thể thu được bao nhiêu mẫu hiển thị khác nhau của 10 đồng tiền?

Câu 4 (4,0 *điểm*).

Cho các số thực dương $a; b; c$. Chứng minh rằng

$$4(a+b+c) \geq 3\left(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}\right)$$

Câu 5 (4,0 *điểm*).

Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp trong đường tròn. Gọi B_1 là điểm đối xứng B qua AC; D_1 là điểm đối xứng D qua CE; F_1 là điểm đối xứng của F qua EA. Biết rằng $AB.CD.EF = BC.DE.FA$

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AD; BE và CF đồng quy tại P.

b) Chứng minh rằng hai tam giác $B_1D_1F_1$ và BDF đồng dạng.

——— Hết ———

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính bỏ túi.

Họ và tên thí sinh. . . . .; Số báo danh. . . . .