

Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x = 8 - y$ và $z^2 = xy - 16$. Tính: $P = x + z$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, có góc lớn nhất bằng α . Biết rằng a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4(c + 2) = (c + 4)x$. Tính α .

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, a_{10}$ là các số nguyên dương sao cho: $a_1^2 + (2a_2)^2 + (3a_3)^2 + \dots + (9a_9)^2 + (10a_{10})^2 = 385$.

Tính $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 + a_{10}$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $(a - b)(b - c)(c - a)$ chia hết cho 48.

Bài 5. (3,0 điểm)

a) Cho $n \in \mathbb{N} (n \geq 2)$ và $A = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, 2, \dots, n$). Giả sử a là ước số của A và $a > a_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng a là một hợp số.

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $ac = bd$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là một hợp số.

Bài 6. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $AE = AF$. Đường trung tuyến AM và đường thẳng EF cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng: $\frac{QE}{QF} = \frac{AC}{AB}$.

Bài 7. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq \frac{1}{12}(|a - b| + |b - c| + |c - a|)^2$.

Bài 8. (2,0 điểm)

Trên bảng cho 2020 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2020. Ta thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau: mỗi lần biến đổi ta xóa đi hai số bất kì a, b có trên bảng rồi viết thêm số $a + b - \frac{1}{3}ab$ vào bảng. Khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số thì dừng lại. Tìm số còn lại đó.

----- HẾT -----

<https://toanmath.com/>

+ Học sinh **không được phép** sử dụng máy tính cầm tay.

+ Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.