

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn kiểm tra: Toán
Ngày thi: 21/09/2023
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không tính thời gian phát đề)

Bài 1. (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a. Rút gọn biểu thức A .

b. Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1, b^2 - 3bc + 4c^2 = 2$ và $c^2 + 3ca - a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^4 + b^4 + c^4$.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $4x^2 - 9 = 5x + 6\sqrt{x+1}$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn $7a^2 - 1$ chia hết cho $7ab - 1$ và $a^2 + b + 2$ là số chính phương

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $x^3 - 2x = y^3 - 2y$. Chứng minh rằng $x = y$.

2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = 3a + ab + abc.$$

Bài 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. E là điểm bất kì thuộc đoạn OB , trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $OF = OC$. Đường thẳng qua F vuông góc với FO cắt đường thẳng BD tại S . Kẻ FH vuông góc với BD ($H \in BD$).

1. Chứng minh $\Delta SFB \sim \Delta SDF$ và $SB \cdot SD = SH \cdot SO$.

2. Chứng minh rằng FE là phân giác của $\widehat{BFD}$. Từ đó suy ra $\frac{1}{BE^2} + \frac{1}{DE^2} = \frac{2}{EF^2}$.

3. Kẻ ET vuông góc với FD tại T . Chứng minh rằng FO, AH và ST đồng quy.

Bài 5. (1,0 điểm)

1. Xét tập $T = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Chỉ ra một tập con U có 4 phần tử của T thỏa mãn với mọi $x, y \in U, x \neq y$ thì $x + y$ không chia hết cho $x - y$.

2. Cho M là tập con chứa n phần tử của $S = \{1, 2, 3, \dots, 2023\}$. Tìm n lớn nhất để mọi $x, y \in M, x \neq y$ thì $x + y$ không chia hết cho $x - y$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn kiểm tra: Toán

Ngày thi: 21/09/2023

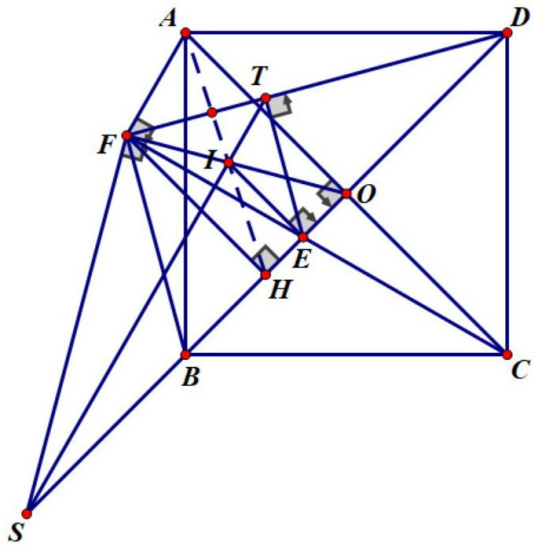
Thời gian làm bài: 120 phút

(Không tính thời gian phát đề)

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
1		Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ với $x > 0$, $x \neq 4$. a. Rút gọn biểu thức A. b. Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.	1,5 1,5
	1	$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ $= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5x-10\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}$ $= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$	1,5
		Vì $x > 0 \Rightarrow 5\sqrt{x} > 0; 2\sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow A > 0$ Mặt khác, xét $A - 3 = \frac{5\sqrt{x} - 3(2\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{-\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 1} < 0 \forall x > 0 \Rightarrow A < 3$ Vậy $0 < A < 3$	0,5 0,5
		Do đó A nguyên $\Leftrightarrow A = 1$ hoặc $A = 2$. $A = 1 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn) $A = 2 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2(2\sqrt{x} + 1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (loại) Vậy $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$	0,5
2		2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1; b^2 - 3bc + 4c^2 = 2$ và $c^2 + 3ca - a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^4 + b^4 + c^4$	2,0

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
		Ta có : $\begin{cases} 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1 \\ b^2 - 3bc + 4c^2 = 2 \\ c^2 + 3ca - a^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1 \\ b^2 - 3bc + 4c^2 = 2 \\ -c^2 - 3ca + a^2 = -3 \end{cases} \rightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3(ab + bc + ca) = 0$	1
		$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$	0,5
		$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1 \\ b^2 - 3bc + 4c^2 = 2 \\ c^2 + 3ca - a^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 3$	0,5
2	1	Giải phương trình $4x^2 - 9 = 5x + 6\sqrt{x+1}$	2,0
		Đk: $x \geq -1$.	
		Pt $\Leftrightarrow (2x+1)^2 = (3\sqrt{x+1} + 1)^2$	1,0
		TH1: $2x+1 = 3\sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(\text{TM}) \\ x = -\frac{3}{4}(\text{TM}) \end{cases}$	0,5
		TH2: $2x+1 = -3\sqrt{x+1} - 1 \Leftrightarrow x = -1(\text{TM})$	
		Vậy $x \in \left\{-1; -\frac{3}{4}; 3\right\}$	0,5
		Chú ý: có thể giải bằng cách đặt $y = \sqrt{x+1} \geq 0$ và đưa về phương trình bậc 4 phân tích được.	
	2	Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn: $7a^2 - 1$ chia hết cho $7ab - 1$ và $a^2 + b + 2$ là số chính phương	2,0
		Vì a, b là các số nguyên dương nên $7a^2 - 1$ và $7ab - 1$ là các số nguyên dương. Vì $7a^2 - 1 : 7ab - 1$ nên $7a^2 - 1 \geq 7ab - 1 \Rightarrow 7a^2 \geq 7ab \Rightarrow a \geq b$.	0,5
		Lại có: $\left[7a^2 - 1 - (7ab - 1)\right] : (7ab - 1)$ nên $7a^2 - 7ab : 7ab - 1 \Rightarrow 7a(a-b) : 7ab - 1$. mà $(7a, 7ab - 1) = 1$ nên $(a-b) : 7ab - 1$.	0,5
		Nếu $a > b$ thì $a - b \geq 7ab - 1 \Rightarrow a(1 - 7b) + 1 - b \geq 0$ điều này là vô lý do $1 - 7b < 0, 1 - b < 0$ vậy nên chỉ có thể xảy ra $a = b$.	0,5

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
		Ta cần tìm a để $a^2 + a + 2$ là số chính phương. Nếu $a > 1$ thì $a^2 < a^2 + a + 2 < a^2 + 2a + 1$ nên $a^2 + a + 2$ không thể là số chính phương. Với $a = 1$ thì $a^2 + a + 2 = 4 = 2^2$ là số chính phương. Vậy $a = b = 1$ là giá trị cần tìm	0,5
3	1	Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $x^3 - 2x = y^3 - 2y$. Chứng minh rằng $x = y$.	2,0
		Giả sử $x \neq y \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 2$ $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*, (a, b) = (c, d) = 1$	0,5
		$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow a^2d^2 + abcd + c^2b^2 = 2b^2d^2$ $u = (b, d) \Rightarrow b = ux, d = uy, (x, y) = 1$. Có $\begin{cases} (a, b) = 1 \Rightarrow (a, x) = 1 \\ (c, d) = 1 \Rightarrow (c, y) = 1 \end{cases}$	0,5
		$a^2y^2 + acxy + c^2x^2 = 2x^2y^2 \Rightarrow \begin{cases} x:y \\ y:x \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow b = d = u$ $\Rightarrow a^2 + ac + c^2 = 2u^2$	
		Nếu a chia hết cho 2 thì c chia hết cho 2 và ngược lại Nếu a và c cùng không chia hết cho 2 thì VT lẻ và VP chẵn, vô lý	0,5
		Vậy a và c cùng chia hết cho 2. Khi đó $2u^2 = a^2 + ac + c^2$ chia hết cho 4. Suy ra u chia hết cho 2. Điều này trái với $(a, u) = (a, b) = 1$. Vậy $x = y$	0,5
2		Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:	2,0
		$P = 3a + ab + abc.$	
		$P = a(3 + b) + abc \leq \frac{(a + 3 + b)^2}{4} + abc = \frac{(7 - c)^2}{4} + abc$ $\Rightarrow P \leq \frac{c^2 + 2(2ab - 7)c + 49}{4} = \frac{f(c)}{4}$	0,5
		Chứng minh nếu $f(x)$ là đa thức bậc hai với hệ số cao nhất dương và $m \leq x \leq n$ thì $\max f(x) = \max \{f(m); f(n)\}$	0,5
		Áp dụng: $\max f(c) = \max \{f(0); f(4)\} = \{49; f(4)\}$ $f(4) = 9 + 8ab \leq 9 + 2(a + b)^2 = 9 + 2(4 - c)^2 \leq 41$	0,5

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
		$\Rightarrow \max \{f(0); f(4)\} = 49$ $\Rightarrow P_{\max} = \frac{49}{4}$, khi $a = \frac{7}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$	0,5
4	1		
		Ta có $OF = OC = OB = OD \Rightarrow \widehat{BFD} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{SFB} = \widehat{SDF}$ (cùng phụ với $\widehat{BFO} = \widehat{ODF}$)	1,0
		$\Rightarrow \Delta SBF \sim \Delta SDF$ (g.g) $\Rightarrow SB \cdot SD = SF^2$	1,0
		Lại có: $SH \cdot SO = SF^2$ (hệ thức lượng) $\Rightarrow$ (đpcm)	1,0
	2	Có $\widehat{OFD} = \frac{1}{2} \widehat{FOB}$ và $\widehat{OFE} = \frac{1}{2} \widehat{FOA}$ (góc ngoài tại đỉnh cân của tam giác cân) Suy ra $\widehat{EFD} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 45^\circ$ Suy ra FE là phân giác $\widehat{BFD}$.	1,0
		Suy ra $\frac{EF^2}{BE^2} + \frac{EF^2}{DE^2} = \frac{DF^2}{BC^2} + \frac{BF^2}{BC^2} = \frac{BD^2}{BC^2} = 2$ (đpcm)	1,0
	3	Gọi I là giao của FO và ST . Từ câu a) $\Rightarrow \widehat{SFB} = \widehat{SDF} \Rightarrow \widehat{SEF} = \widehat{SFE}$ $\Rightarrow SE = SF$ mà $TE = TF$ (do ΔETF vuông cân) $\Rightarrow TS$ trung trực EF mà I thuộc ST $\Rightarrow \widehat{IFS} = \widehat{IES} = 90^\circ \Rightarrow IE \parallel FH$ Xét hình thang $AOHF$ ($AO \parallel FH$) $\frac{FI}{IO} = \frac{HE}{EO} = \frac{FH}{OC}$ (Talet $CO \parallel FH$) $= \frac{AO}{FH}$ $\Rightarrow A, I, H$ thẳng hàng $\Rightarrow$ đpcm	0,5
			0,5

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
5		1. Xét tập $T = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Chỉ ra một tập con U có 4 phần tử của T thỏa mãn với mọi $x, y \in U, x \neq y$ thì $x + y$ không chia hết cho $x - y$. 2. Cho M là tập con chứa n phần tử của $S = \{1, 2, 3, \dots, 2023\}$. Tìm n lớn nhất để mọi $x, y \in M, x \neq y$ thì $x + y$ không chia hết cho $x - y$.	1,0
	1	$U = \{1, 4, 7, 10\}$	0,25
	2	Xét $M = \{3k + 1 \text{ với } k = 0, 1, 2, \dots, 674\}$ thì A là tập con của S và A có 675 phần tử. Dễ thấy hiệu 2 số bất kỳ của A là bội của 3 còn tổng của 2 số bất kỳ của M không chia hết cho 3. Do đó với 2 số bất kỳ trong M thì tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.	0,25
		Xét N là tập con của S có ít nhất 676 phần tử. Chia S thành 675 tập con như sau $\{1, 2, 3\} \{4, 5, 6\} \dots \{2020, 2021, 2022\} \{2023\}$. Khi đó sẽ có ít nhất 2 phần tử của N , giả sử là a và b , thuộc 1 trong các tập con 3 phần tử kể trên.	0,25
		Chú ý rằng hiệu 2 phần tử bất kỳ trong mỗi tập 3 phần tử kể trên không lớn hơn 2. Vậy ta có $a - b = 1$ hoặc 2. Nếu $a - b = 1$ thì $a + b$ chia hết cho $a - b$, nếu $a - b = 2$ thì a và b cùng tính chẵn lẻ nên $a + b$ chẵn và chia hết cho $a - b$. Vậy N không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó n lớn nhất = 675.	0,25