

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN - LỚP 9

Thời gian làm bài: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

(Đề bài gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm).

a) Cho $M = \frac{x^2 + 5\sqrt{x^2 - 1} + x}{5x - 5 + x\sqrt{x^2 - 1}}$. Rút gọn và tính giá trị của M khi $x = -1 - \sqrt{2}$

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 14$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{a+11} + \frac{\sqrt{b}}{b+11} + \frac{\sqrt{c}}{c+11} = \frac{22}{\sqrt{(a+11)(b+11)(c+11)}}$

Câu 2. (2,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} + \sqrt{x(1-x)} = 1$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Cho a, b, c, k là các số tự nhiên thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = a + b + c + k^2 - 2k + 1$. Chứng minh rằng $k-1$ chia hết cho 3.

b) Tìm x, y nguyên biết: $7x^2 + y^2 + 4xy + 12x + 5 = 0$

Câu 4: (3 điểm).

1) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Các đường phân giác của góc BAH, CAH cắt BC lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh: $BC \cdot EH^2 = CH \cdot BE^2$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ trùng với tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

b) Kí hiệu d_1, d_2 lần lượt là các đường thẳng vuông góc với BC tại E, F. Chứng minh rằng d_1, d_2 tiếp xúc với đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

2) Cho tam giác ABC. Gọi l_A, l_B, l_C lần lượt là độ dài các đường phân giác trong của góc A, B, C. Chứng minh rằng $l_A = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2}$ và $\frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Câu 5 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $x + y + z = 9$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} + \frac{y^3 + z^3}{yz + 9} + \frac{z^3 + x^3}{xz + 9}$

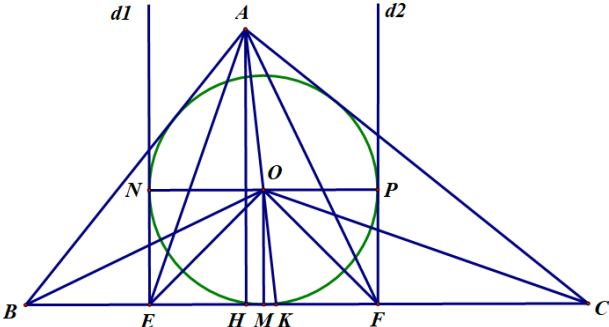
-----HẾT-----

Họ và tên học sinh.....Số báo danh.....

Chữ kí của giám thị 1..... Chữ kí của giám thị 2.....

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	A	$M = \frac{x(x+1)+5\sqrt{x^2-1}}{5(x-1)+x\sqrt{x^2-1}}$ (ĐK: $x > 1$ hoặc $x \leq -1$)	0,25
		$x > 1 \Rightarrow M = \frac{\sqrt{x+1}(x\sqrt{x+1}+5\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(5\sqrt{x-1}+x\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$	0,25
		$x \leq -1 \Rightarrow M = \frac{\sqrt{-x-1}(-x\sqrt{-x-1}+5\sqrt{-x+1})}{\sqrt{-x+1}(-5\sqrt{-x+1}+x\sqrt{-x-1})} = -\frac{\sqrt{-x-1}}{\sqrt{-x+1}}$	0,25
		khi $x = -1-\sqrt{2} < -1 \Rightarrow M = -\sqrt{\frac{-x-1}{-x+1}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}} = -\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0,25
	b	Ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 6 \Leftrightarrow a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = 36$ $\Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 11$	0,25
		Do đó: $a + 11 = a + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})$ Tương tự ta có: $b + 11 = b + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ $c + 11 = c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = (\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{b})$	0,25
		Suy ra: $\frac{\sqrt{a}}{a+11} + \frac{\sqrt{b}}{b+11} + \frac{\sqrt{c}}{c+11} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{a})} + \frac{\sqrt{c}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{b})}$ $= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c}) + \sqrt{b}(\sqrt{c}+\sqrt{a}) + \sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$	0,25
		$= \frac{2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})}{\sqrt{(a+11)(b+11)(c+11)}} = \frac{22}{\sqrt{(a+11)(b+11)(c+11)}}$	0,25
2		Điều kiện xác định $0 \leq x \leq 1$ Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2x\sqrt{x} + (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ $\Leftrightarrow (a-b)(ab+1) = 0$	0,25
		Đặt $\sqrt{x} = a$ ($a \geq 0$) $\sqrt{1-x} = b$ ($b \geq 0$) khi đó $x = 1 - b^2$	0,25
	a	Ta có phương trình $2(1-b^2)a + (a+b)ab = a+b$	
		Vì $ab+1 > 0$ nên $a = b$ Khi đó ta được phương trình $\sqrt{x} = \sqrt{1-x}$	0,25

		Tìm được $x = \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện nên là nghiệm của pt đã cho	0.25
	b	Từ phương trình (1) ta suy ra: $9 = 12x - 3x^2 - 3y^2$ thế vào phương trình (2) thu gọn ta được: $x^3 + y^3 = 3(x^2 - y^2) \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0 \end{cases}$	0.25
		* Nếu $x+y=0 \Leftrightarrow y=-x \Rightarrow y^2=x^2$ thế vào phương trình (1) ta được $2x^2+3=4x \Leftrightarrow 2(x-1)^2+1=0$ phương trình này vô nghiệm.	0.25
		* Nếu $x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0$, trừ vế theo vế của phương này với phương trình (1) ta được: $-xy - 3x + 3y - 3 = -4x \Leftrightarrow xy - x - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$	0.25
		+ Nếu $x=3$ thay vào phương trình (1) ta suy $y^2=0$ suy ra $y=0$ $\Rightarrow (x;y) = (3; 0)$ thỏa mãn phương trình (2). + Nếu $y=1$ thay vào phương trình (1) ta suy $(x-2)^2=0$ $\Rightarrow x=2 \Rightarrow (x;y) = (2; 1)$ thỏa mãn phương trình (2). Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (3;0), (2; 1)$.	0.25
		Bài toán phụ: Với x là số tự nhiên. Chứng minh rằng: $x^3 - x$ luôn chia hết cho 3 Chứng minh: Ta có: $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ Do đó: $x^3 - x$ luôn chia hết cho 3	0,25
		Ta có : $a^3 + b^3 + c^3 = a+b+c+k^2-2k+1$ Hay $a^3-a + b^3-b + c^3-c = k^2-2k+1$ Hay: $(k-1)^2 = a^3-a + b^3-b + c^3-c$	0,25
		Áp dụng bài toán ta có: $a^3-a:3$ $b^3-b:3$ $c^3-c:3$ Nên: $(k-1)^2:3$	0,25
		Mà 3 là số nguyên tố Nên : $k-1:3$ (đpcm)	0,25
		Ta có: $7x^2 + y^2 + 4xy + 12x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 + 3x^2 + 12x + 12 - 7 = 0$ $\Leftrightarrow (2x+y)^2 + 3(x+2)^2 = 7$	0,25
		Suy ra: $0 \leq 3(x+2)^2 \leq 7$ Hay: $0 \leq (x+2)^2 \leq 2$ Do đó: $(x+2)^2 \in \{0;1\}$	0,25
		Ta có các trường hợp: +) $(x+2)^2 = 0$ Khi đó $(2x+y)^2 = 7$ (Loại)	0,25

		+) $(x+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$	
		Khi đó: $(2x+y)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$ Nên: $x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $x=-3 \Rightarrow \begin{cases} y=8 \\ y=4 \end{cases}$ Nghiệm của phương trình $(x; y) \in \{(-1; 4); (-1; 0); (-3; 8); (-3; 4)\}$	0,25
4			
	1.	Vì AE là phân giác góc BAH, ta có: $\frac{EB}{EH} = \frac{AB}{AH}$	0,25
	a	$\Rightarrow \frac{EB^2}{EH^2} = \frac{AB^2}{AH^2} = \frac{BH \cdot BC}{BH \cdot CH} = \frac{BC}{CH}$ $\Rightarrow BC \cdot EH^2 = CH \cdot BE^2$	0,25
		Gọi O là giao điểm 2 đường phân giác trong góc B, C. $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ Ta có: $\widehat{AEC} = \widehat{B} + \widehat{BAE} = \widehat{HAC} + \widehat{EAH} = \widehat{EAC}$ $\Rightarrow \triangle AEC$ cân tại C $\Rightarrow CO$ là phân giác góc ACE đồng thời là trung trực của AE	0,25
		CMTT: BO là trung trực của AE $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF \Rightarrow \text{ĐPCM}$	0,25
	1. b	Kẻ OM, ON, OP lần lượt vuông góc với BC, d_1, d_2 , gọi K là giao điểm của AO với BC. Có: $\widehat{EOF} = \widehat{EOK} + \widehat{FOK} = 2(\widehat{EAO} + \widehat{FAO}) = 2\widehat{EAF} = \widehat{BAC} = 90^\circ$	0,25
		Mà $OE = OF \Rightarrow \triangle EOF$ vuông cân tại O $\Rightarrow OM = EM = FM$	0,25
		Chúng minh được: $ON = ME; OP = MF$	0,25
		$\Rightarrow OM = ON = OP$ $\Rightarrow d_1, d_2$ tiếp xúc với đường tròn nội tiếp	0,25
		Chúng minh được công thức $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ bằng sử dụng tam giác cân tại đỉnh A có $\widehat{A} = 2\alpha$ thông qua công thức diện tích để đi đến kết luận trên.	0,25
		Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$, $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}cl_A \sin \frac{A}{2}$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}bl_A \sin \frac{A}{2}$	0,25

	2	Mà $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} \Rightarrow l_A = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$	
		$\frac{\cos \frac{A}{2}}{l_A} = \frac{1}{2} \left(\frac{b+c}{bc} \right) = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$ Tương tự: $\frac{\cos \frac{B}{2}}{l_B} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}, \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$ $\Rightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{l_A} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{l_B} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$	0,25
		Ta có $\frac{\cos \frac{A}{2}}{l_A} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{l_B} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_C} < \frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C}$ $\Rightarrow \frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$	0,25
5		Ta chứng minh được : với a, b là các số dương ta có $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a+b)^3$ và $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$. Dấu bằng xảy ra khi a=b	0,25
		Khi đó ta có $\frac{x^3 + y^3}{xy + 9} \geq \frac{(x+y)^3}{(x+y)^2 + 36} = x + y - \frac{36(x+y)}{(x+y)^2 + 36}$ Áp dụng BĐT Cô-si ta được $(x+y)^2 + 36 \geq 12(x+y)$ $\Rightarrow \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} \geq x + y - \frac{36(x+y)}{12(x+y)} = x + y - 3 \Leftrightarrow \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} \geq x + y - 3$	0,25
		Chứng minh tương tự ta được $\frac{y^3 + z^3}{yz + 9} \geq y + z - 3; \frac{z^3 + x^3}{xz + 9} \geq z + x - 3$ Cộng ba BĐT cùng chiều ta được $M \geq x + y - 3 + y + z - 3 + z + x - 3$ $\Leftrightarrow M \geq 2(x + y + z) - 9 \Leftrightarrow M \geq 2.9 - 9 \Leftrightarrow M \geq 9$	0,25
		Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 3$ Vậy GTNN của M là 9 đạt được khi $x = y = z = 3$	0,25