SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
LỚP 12 THPT, NĂM HỌC 2021-2022
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 24/11/2021

Bài 1 (4,0 điểm).

a) Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức có bậc không quá 2020 và thỏa mãn

$x^{2021}.P(x)+(x-2)^{2021}.Q(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $Q(1)$.

b) Tìm tất cả bộ ba số thực dương (x,y,z) thỏa mãn hai điều kiện:

$xy+yz+zx+xyz=4$ và $\sqrt{2(4-xy)}+\sqrt{5(4-yz)}+\sqrt{10(4-zx)}=12$.

Bài 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=0,\ x_2=1$ và $x_{n+2}=\dfrac{x_n+1}{x_{n+1}+x_n+2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn tâm O và có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi O_1 là điểm đối xứng của O qua đường thẳng BC. AO_1 cắt BC tại L, DE cắt HC tại M, DF cắt HB tại N.

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN và đường tròn đường kính AL tiếp xúc nhau.

b) Tiếp tuyến tại D của đường tròn đường kính AL cắt EF tại K. Chứng minh $KH = KD$.

Bài 4 (5,0 điểm).

a) Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+y)\ge f(x)+y.f(f(x))$ với mọi số thực x, y. Chứng minh rằng $f(0)\le 0$.

b) Cho các số nguyên dương a, b, c phân biệt. Chứng minh tồn tại số nguyên n sao cho $a+n,\ b+n,\ c+n$ là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bài 5 (3,0 điểm). Trên mặt phẳng ta vẽ 3333 đường tròn đôi một khác nhau và có bán kính bằng nhau. Chứng minh rằng luôn chọn ra được trong số đó 34 đường tròn mà các đường tròn này đôi một có điểm chung hoặc đôi một không có điểm chung.

------------------- HẾT -------------------

Họ và tên thí sinh: .... Chữ kí của 01 CBCT: ....

Số báo danh: ....