

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Ngày thi: 01/10/2023

(Đề thi có 01 trang)

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm). Giải phương trình: $4|2x+1|(x^2+x+1) = x^3+3x^2+6x+4$.

Câu 2 (3,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^4 + (y+2)^3 = (x+2)^4$.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, xét phương trình: $\ln(1+x^2) + nx - 1 = 0$ (1).

Chứng minh rằng phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

b) Gọi x_n ($n \in \mathbb{N}^*$) là nghiệm của phương trình (1). Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-nx_n)}{x_n}$.

Câu 4 (3,0 điểm). Với k là số thực cho trước, tìm tất cả các hàm đơn điệu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+f(y)) = k^2y + f(x), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 5 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC . Lấy hai điểm E, F nằm bên trong tam giác ABC sao cho đường thẳng AE và AF đối xứng qua đường phân giác trong góc A của tam giác ABC . Gọi I là trung điểm EF và G, H lần lượt là hai điểm đối xứng với E qua AB, AC .

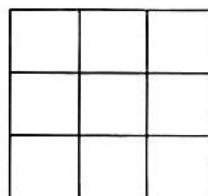
a) Chứng minh: $\Delta GAF = \Delta HAF$.

b) Gọi M là giao điểm của EG và AB , N là giao điểm của EH và AC ; K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên AB và AC .

Chứng minh rằng: Tứ giác $MNKL$ nội tiếp được đường tròn.

c) Gọi T là giao điểm của MN và KL . Chứng minh AT vuông góc EF .

Câu 6 (2,0 điểm). Cho một bảng ô vuông 3×3 (như hình bên). Điền vào mỗi ô một số nguyên khác nhau, thuộc đoạn $[1;9]$. Tính xác suất để mỗi hàng và mỗi cột bất kỳ đều có ít nhất một số chẵn.



Câu 7 (3,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng: $\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right) \geq 3(a+b+c)^2$.

----- HẾT -----