

CHUYÊN ĐỀ 14.

CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI VÀ THỨ BA CỦA TAM GIÁC

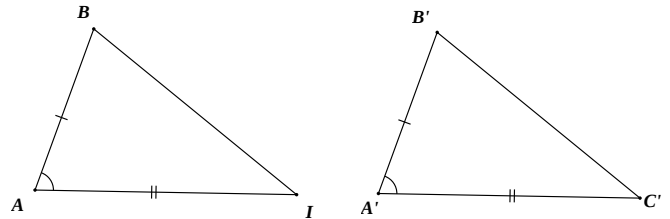
PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trường hợp bằng nhau: cạnh - góc - cạnh

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ A = A' \\ AC = A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ (c.g.c)}$$

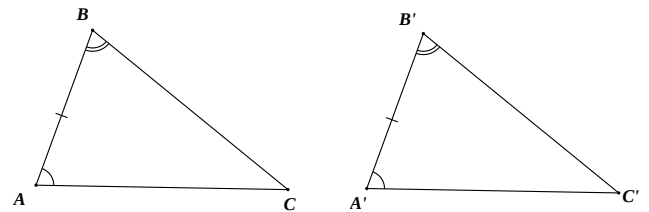


2. Trường hợp bằng nhau: cạnh - góc - cạnh

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\left. \begin{array}{l} B = B' \\ AB = A'B' \\ A = A' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ (g.c.g)}$$



PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

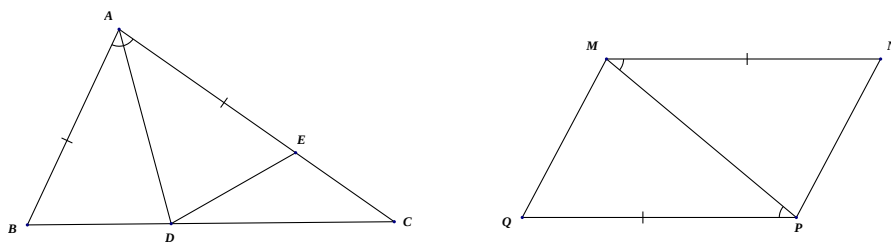
Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác bằng nhau

I. Phương pháp giải:

- + Xét hai tam giác.
- + Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc.
- + Kết luận hai tam giác bằng nhau.

II. Bài toán.

Bài 1. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Lời giải:

Các tam giác bằng nhau: $\triangle ABD = \triangle AED$; $\triangle QMP = \triangle NPM$. Vì:

+ Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có :

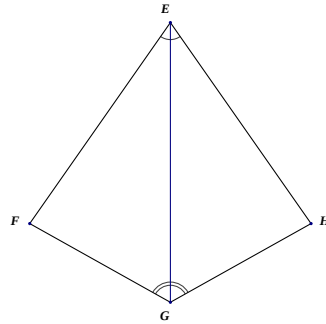
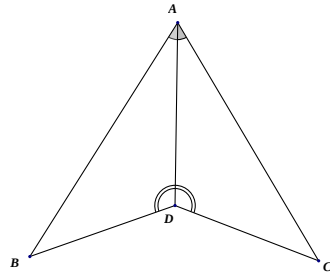
$$\begin{array}{l} AB = AE \text{ (giả thiết); } \angle BAD = \angle EAD \text{ (giả thiết); } AD \text{ là cạnh chung} \\ \Rightarrow \triangle ABD = \triangle AED \text{ (c.g.c).} \end{array}$$

+ Xét $\triangle QMP$ và $\triangle NPM$ có:

$$QM = NP \text{ (giả thiết); } \angle QMP = \angle NPM \text{ (giả thiết); } MP \text{ là cạnh chung}$$

$$\Rightarrow \Delta QMP = \Delta NPM \text{ (c.g.c.)}$$

Bài 2. MD1. Trong các hình vẽ sau, có hai tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Lời giải:

Các tam giác bằng nhau: $\Delta ADB = \Delta ADC$; $\Delta EFG = \Delta EHG$.

Thật vậy:

+ Xét ΔADB và ΔADC có:

$\angle ADB = \angle ADC$ (giả thiết); AD là cạnh chung; $\angle BAD = \angle CAD$ (giả thiết)

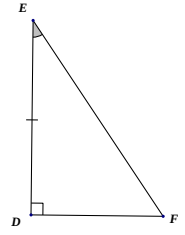
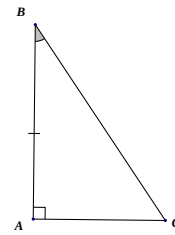
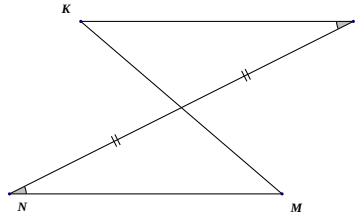
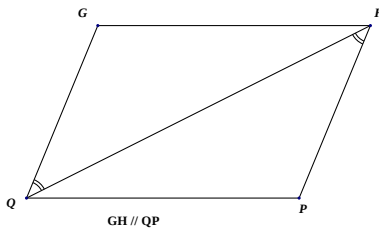
$$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta ADC \text{ (g.c.g.)}$$

+ Xét ΔEFG và ΔEHG có:

$\angle FEG = \angle HEG$ (giả thiết); EG là cạnh chung; $\angle EGF = \angle EGH$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \Delta EFG = \Delta EHG \text{ (g.c.g.)}$$

Bài 3. MD1 Trong các hình vẽ sau, có hai tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Lời giải:

Các tam giác bằng nhau: $\Delta GQH = \Delta PHQ$; $\Delta IKL = \Delta IMN$; $\Delta ABC = \Delta DEF$.

Thật vậy:

+ Xét ΔGQH và ΔPHQ có:

$\angle GQH = \angle PHQ$ (theo giả thiết)

$\angle GHQ = \angle PQH$ (hai góc so le trong, $GH \parallel QP$)

QH là cạnh chung

$$\Rightarrow \Delta GQH = \Delta PHQ \text{ (g.c.g.)}$$

+ Xét ΔIKL và ΔIMN có:

$IL = IK$ (theo giả thiết);

$\angle KIL = \angle MIN$ (hai góc đối đỉnh);

$\angle KLI = \angle MNI$ (theo giả thiết)

$$\Rightarrow \Delta IKL = \Delta IMN \text{ (g.c.g.)}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ có:

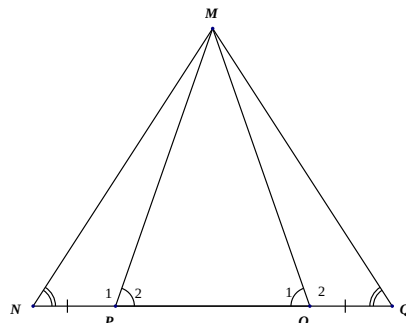
$$A = D \text{ (theo giả thiết);}$$

$$B = E \text{ (theo giả thiết);}$$

$$AB = DE \text{ (theo giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF \text{ (g.c.g)}$$

Bài 4. MD1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Lời giải:

Các tam giác bằng nhau: $\triangle MNP = \triangle MQO$; $\triangle MNO = \triangle MQP$.

Thật vậy:

+) Ta có: $P_1 + P_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù); $O_1 + O_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\text{Lại có : } P_2 = O_1 \Rightarrow P_1 = O_2$$

Xét $\triangle MNP$ và $\triangle MQO$ có:

$$P_1 = O_2 \text{ (chứng minh trên) ; } NP = QO \text{ (theo giả thiết); } N = Q \text{ (theo giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle MNP = \triangle MQO \text{ (g.c.g)}$$

+) Ta có: $NO = NP + PO$; $QP = QO + OP$. Mà $NP = QO \Rightarrow NO = QP$.

+ Xét $\triangle MNO$ và $\triangle MQP$ có:

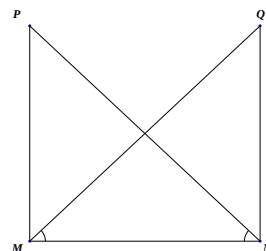
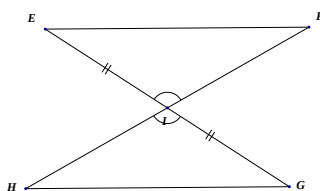
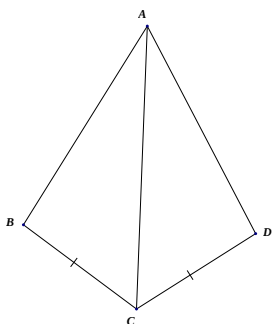
$$MN = MQ \text{ (vì } \triangle MNP = \triangle MQO \text{ - theo chứng minh trên),}$$

$$N = Q \text{ (theo giả thiết),}$$

$$NO = QP \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MNO = \triangle MQP \text{ (c.g.c).}$$

Bài 5. MD2 Nêu thêm một điều kiện để mỗi hình dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh.



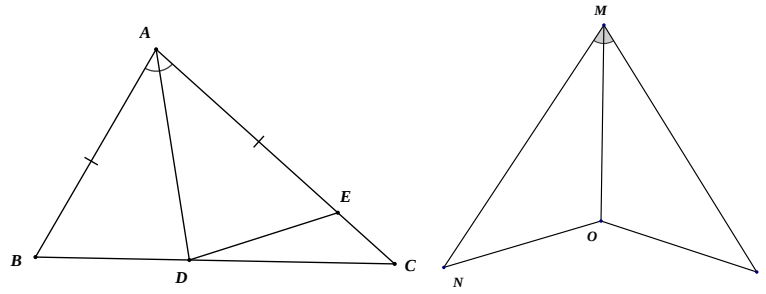
Lời giải:

Để $\triangle ABC = \triangle ADC$ theo trường hợp cạnh - góc - cạnh thì thêm điều kiện : $ACB = ACD$.

Để $\triangle EFI = \triangle GHI$ theo trường hợp cạnh - góc - cạnh thì thêm điều kiện: $IF = IH$.

Để $\triangle MNP = \triangle NMQ$ theo trường hợp cạnh - góc - cạnh thì thêm điều kiện: $NP = MQ$.

Bài 6. MD2 Nêu thêm một điều kiện để mỗi hình dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc.



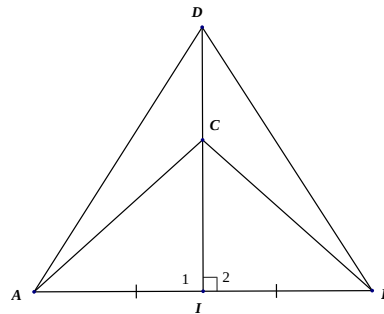
Lời giải:

Để $\triangle ABD = \triangle AED$ theo trường hợp góc - cạnh - góc thì thêm điều kiện: $ADB = ADE$.

Để $\triangle MNO = \triangle MPO$ theo trường hợp góc - cạnh - góc thì thêm điều kiện: $MON = MOP$

Bài 7. MD2 Qua trung điểm I của đoạn thẳng AB , kẻ đường thẳng vuông góc với AB , trên đường thẳng vuông góc đó lấy hai điểm C và D . Nối CA, CB, DA, DB . Tìm các cặp tam giác bằng nhau.

Lời giải:



Xét $\triangle ACI$ và $\triangle BCI$ có:

$AI = BI$ (I là trung điểm của AB),

CI là cạnh chung,

$\angle AIC = \angle BIC = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ACI = \triangle BCI$ (c.g.c).

Xét $\triangle ADI$ và $\triangle BDI$ có:

$AI = BI$ (I là trung điểm của AB),

DI là cạnh chung,

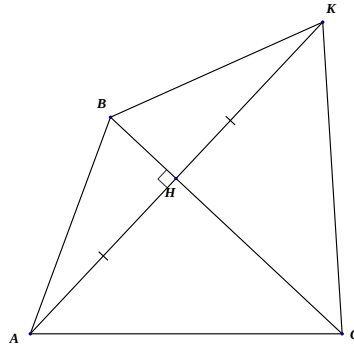
$\angle AID = \angle BID = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ADI = \triangle BDI$ (c.g.c).

Vậy các cặp tam giác bằng nhau là: $\triangle ACI = \triangle BCI$; $\triangle ADI = \triangle BDI$.

Bài 8. MD2 Cho tam giác ABC , kẻ AH vuông góc với BC , ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA lấy điểm K sao cho $HK = HA$, nối KB, KC . Tìm các cặp tam giác bằng nhau.

Lời giải:



+ Xét $\triangle ABH$ và $\triangle KBH$ có: BH là cạnh chung; $AH = KH$ (giả thiết); $AHB = KHB = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABH = \triangle KBH$ (c.g.c).

+ Xét $\triangle CAH$ và $\triangle CKH$ có: CH là cạnh chung; $AH = KH$ (giả thiết); $AHC = KHC = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle CAH = \triangle CKH$ (c.g.c)

+ Xét $\triangle ABC$ và $\triangle KBC$ có:

BC là cạnh chung,

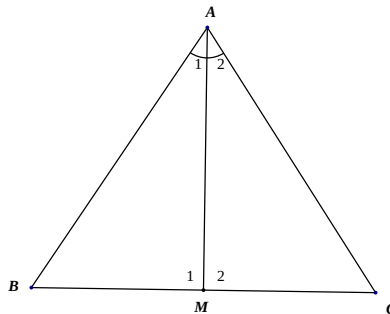
$AC = KC$ (vì $\triangle CAH = \triangle CKH$),

$AB = KB$ (vì $\triangle ABH = \triangle KBH$)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle KBC$ (c. c. c).

Vậy các cặp tam giác bằng nhau: $\triangle ABH = \triangle KBH$, $\triangle CAH = \triangle CKH$, $\triangle ABC = \triangle KBC$.

Bài 9. MĐ2 Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi AM là tia phân giác góc A . Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACM$.



Lời giải:

Xét tam giác ABM và tam giác ACM có :

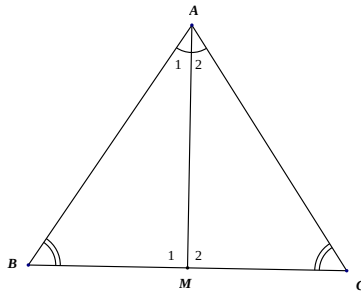
$AB = AC$ (giả thiết),

$BAM = CAM$ (AM là tia phân giác góc A),

AM là cạnh chung.

Suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.g.c).

Bài 10. MĐ2 Cho tam giác ABC có $B = C$. Gọi AM là tia phân giác góc A . Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACM$.



Lời giải:

Xét $\triangle ABM$ có: $M_2 = 180^\circ - (A + B)$ (tổng ba góc trong một tam giác bằng 180°).

Xét $\triangle ACM$ có: $M_2 = 180^\circ - (A + C)$ (tổng ba góc trong một tam giác bằng 180°).

Mà: $B = C$; $A_1 = A_2$ suy ra $M_1 = M_2$.

Xét tam giác ABM và tam giác ACM có :

$M_1 = M_2$ (chứng minh trên),

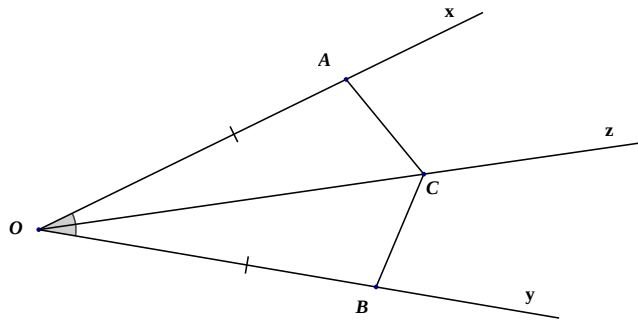
AM là cạnh chung,

$A_1 = A_2$ (AM là tia phân giác góc A).

Suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.g.c).

Bài 11. MĐ2 Cho Oz là tia phân giác góc xOy . Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA = OB$. Chứng minh $\triangle OAC = \triangle OBC$.

Lời giải:



Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$ có:

$OA = OB$ (giả thiết)

$\angle AOC = \angle BOC$ (giả thiết)

OC là cạnh chung

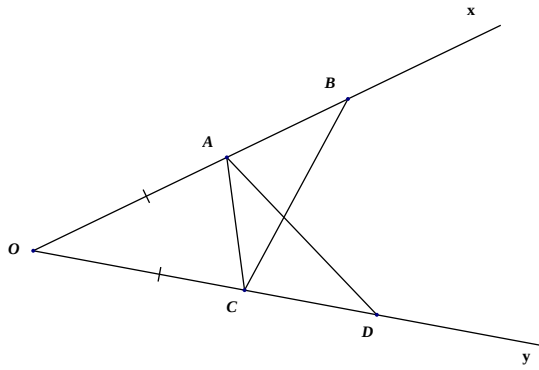
$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC$ (c.g.c).

Bài 12. MĐ3 Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên cạnh Ox lấy hai điểm A và B , trên cạnh Oy lấy hai điểm C và D , sao cho $OA = OC$; $OB = OD$.

a) Chứng minh $\triangle OAD = \triangle OCB$.

b) Chứng minh $\triangle ACD = \triangle CAB$.

Lời giải:



a) Xét tam giác OAD và tam giác OCB , ta có: $OA = OC$ (giả thiết), $\angle AOC$ chung, $OD = OB$ (giả thiết)
 $\Rightarrow \triangle OAD = \triangle OCB$ (c.g.c).

b) Ta có: $OB = OA + AB$, $OD = OC + CD$. Mà $OA = OC$; $OB = OD$ nên $AB = CD$.

Lại có: $\triangle OAD = \triangle OCB$ (chứng minh trên) suy ra $AD = CB$; $\angle D = \angle B$ (tương ứng).

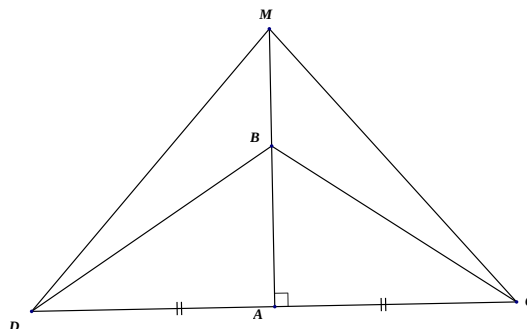
Xét tam giác ACD và tam giác CAB có: $AB = CD$, $\angle D = \angle B$, $AD = CB$ (chứng minh trên)
 $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle CAB$ (c.g.c).

Bài 13. MĐ3 Cho $\triangle ABC$ vuông ở A . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

a) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle ABD$.

b) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M . Chứng minh $\triangle MBD = \triangle MBC$.

Lời giải:



a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ có: $AD = AC$ (giả thiết), $\angle BAD = \angle BAC = 90^\circ$, AB là cạnh chung
 $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABD$ (c.g.c).

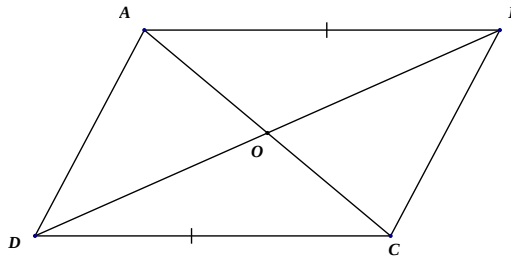
b) Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MBC$ có: $AD = AC$ (giả thiết), $\angle MAD = \angle MAC = 90^\circ$, AM là cạnh chung
 $\Rightarrow \triangle MBD = \triangle MBC$ (c.g.c).

Bài 14. MĐ3 Cho hình vẽ sau, trong đó $AB \parallel CD$, $AB = CD$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle OAB = \triangle ODC$.

b) $\triangle OAC = \triangle ODB$.

Lời giải:



a) Xét $\triangle OAB$ và $\triangle ODC$ có:

$\angle OAB = \angle ODC$ (hai góc so le trong),

$AB = CD$ (giả thiết),

$\angle OBA = \angle OCD$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle ODC$ (g.c.g).

b) Vì $\triangle OAB = \triangle ODC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow OA = OD; OB = OC$ (các cạnh tương ứng).

Xét $\triangle OAC$ và $\triangle ODB$ có: $OA = OD, OB = OC$ (chứng minh trên), $\angle AOB = \angle DOC$ (hai góc đối đỉnh)

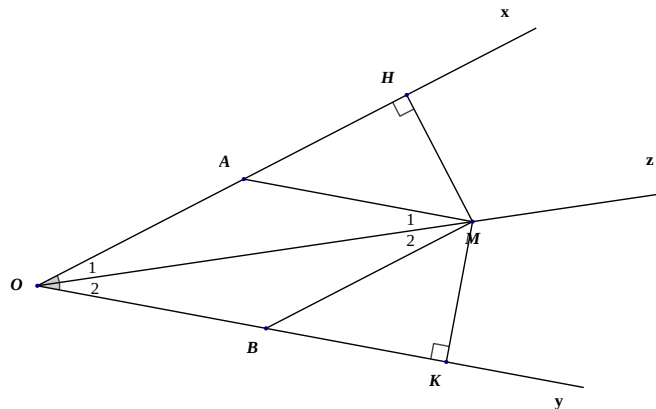
$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle ODB$ (c.g.c),

Bài 15. CD4 Cho góc nhọn xOy có tia Oz là tia phân giác. Qua điểm A thuộc tia Ox , vẽ đường thẳng song song với Oy cắt Oz tại M . Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại B .

a) Chứng minh $\triangle OAM = \triangle MBO$.

b) Từ M vẽ $MH \perp Ox$; $MK \perp Oy$. Chứng minh $\triangle MHO = \triangle MKO$.

Lời giải:



a) Xét $\triangle OAM$ và $\triangle MBO$, ta có :

$\angle O_1 = \angle M_1$ (hai góc so le trong),

OM là cạnh chung,

$\angle M_2 = \angle O_2$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow \triangle OAM = \triangle MBO$ (g.c.g).

b) Ta có: $\angle O_1 + \angle OMH = 90^\circ$ (hai góc nhọn phụ nhau),

$\angle O_2 + \angle OMK = 90^\circ$ (hai góc nhọn phụ nhau).

Lại có : $\angle O_1 = \angle O_2$ (Oz là tia phân giác xOy) $\Rightarrow \angle OMH = \angle OMK$.

Xét $\triangle OMH$ và $\triangle OMK$, ta có:

$O_1 = O_2$ (chứng minh trên),

OM chung,

$OMH = OMK$ (chứng minh trên)

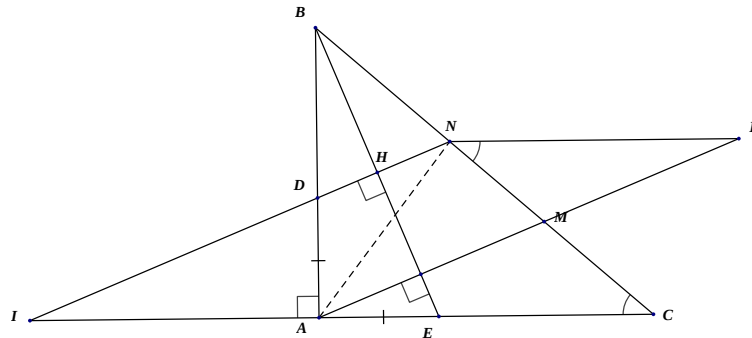
$\Rightarrow \triangle OMH = \triangle OMK$ (g.c.g).

Bài 16. MĐ4 Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$ và $AB = AC$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N . Tia ND cắt tia CA tại I . Chứng minh rằng:

a) $\triangle AID = \triangle ABE$.

b) Chứng minh $CM = MN$.

Lời giải:



a) Gọi H là giao điểm của BE và IN .

Ta có: $\triangle AEB$ vuông tại A nên $\angle ABE + \angle AEB = 90^\circ$; $\triangle DHB$ vuông tại H nên $\angle DBH + \angle HDB = 90^\circ$.

Suy ra $\angle HDB = \angle AEB$.

Mà $\angle HDB = \angle ADI$ (hai góc đối đỉnh) suy ra $\angle ADI = \angle AEB$.

Xét $\triangle ADI$ và $\triangle ABE$ có: $\angle DAI = \angle EAB = 90^\circ$, $AE = AD$ (giả thiết), $\angle ADI = \angle AEB$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle AID = \triangle ABE$ (g.c.g).

b) Ta có $AM \perp BE$, $IN \perp BE$ suy ra $AM \parallel IN$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM tại $F \Rightarrow AC \parallel NF \Rightarrow AI \parallel NF$.

Xét $\triangle AIN$ và $\triangle NFA$ có:

$\angle IAN = \angle FNA$ (so le trong, $AI \parallel NF$),

$\angle ANI = \angle NAF$ (so le trong, $AM \parallel IN$),

AN là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle AIN = \triangle NFA$ (g.c.g) $\Rightarrow NF = AI$ (hai cạnh tương ứng).

Mà $\triangle AID = \triangle ABE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AI = AB$ (hai cạnh tương ứng).

Lại có $AB = AC$ (giả thiết) $\Rightarrow NF = AC$.

Lại có: $AC \parallel NF \Rightarrow \angle CAM = \angle MFN$, $\angle ACM = \angle MNF$ (hai góc so le trong).

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MFN$ ta có:

$\angle CAM = \angle MFN$ (chứng minh trên),

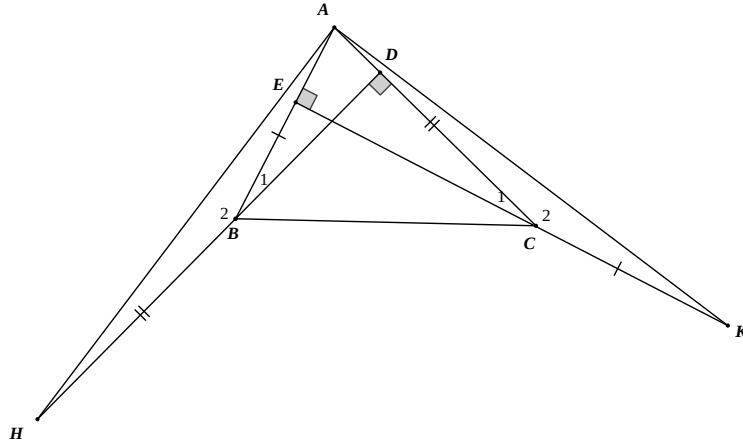
$ACM = MNF$ (chứng minh trên),

$NF = AC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta MFN$ (g.c.g).

Bài 17. MĐ4 Cho ΔABC , kẻ BD vuông góc với AC , CE vuông góc với AB . Trên tia đối của tia BD , lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh $AH = AK$.

Lời giải:



Xét ΔABD vuông tại B (vì $BD \perp AC$) $\Rightarrow B_1 + A = 90^\circ$. (1)

Xét ΔACE vuông tại E (vì $CE \perp AB$) $\Rightarrow C_1 + A = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $B_1 = C_1$.

Mà $B_1 + B_2 = 180^\circ$, $C_1 + C_2 = 180^\circ \Rightarrow B_2 = C_2$.

Xét ΔABH và ΔKCA có: $AB = CK$ (giả thiết), $B_2 = C_2$ (chứng minh trên), $BH = AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta KAC$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AK$ (hai cạnh tương ứng).

Dạng 2. Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh một tính chất khác

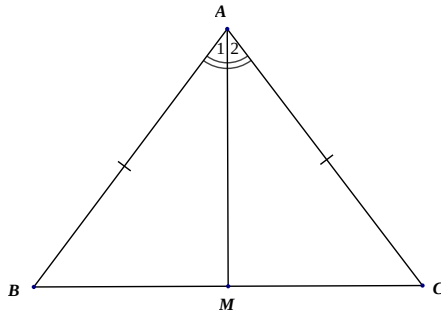
I. Phương pháp giải:

- + Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.
- + Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo một trong hai trường hợp cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc rồi suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau. Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc.
- + Kết hợp với các tính chất đã học về tia phân giác, đường thẳng song song, đường trung trực, tổng ba góc trong một tam giác, ... để chứng minh một tính chất khác.

II. Bài toán.

Bài 1. MĐ1 Cho tam giác ABC có $AB = AC$, tia phân giác của góc A cắt BC tại M . Chứng minh: $BM = CM$.

Lời giải:



Xét tam giác ABM và tam giác ACM có:

$AB = AC$ (giả thiết),

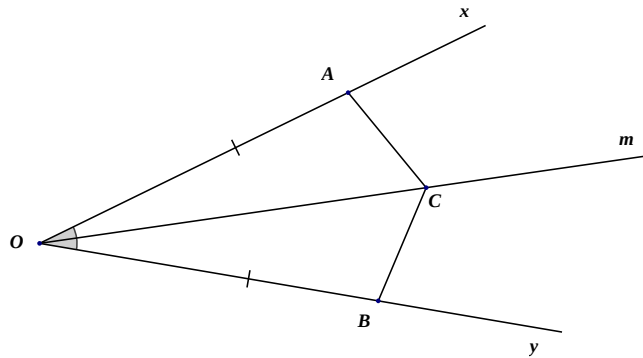
$\angle BAM = \angle CAM$ (AM là tia phân giác góc A),

AM là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = CM$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 2. MĐ1 Cho góc nhọn xOy có Om là tia phân giác, $C \in Om$ ($C \neq O$). Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Chứng minh: $CA = CB$.

Lời giải:

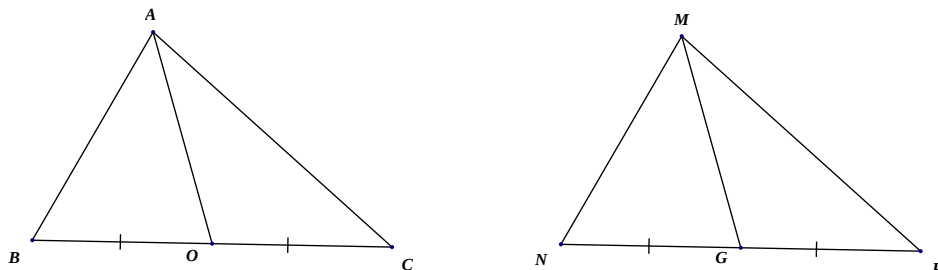


Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$ có: $OA = OB$ (giả thiết), $\angle AOC = \angle BOC$ (giả thiết), OC là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC$ (c.g.c) $\Rightarrow CA = CB$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 3. MĐ1 Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Gọi O và G lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và NP . Chứng minh $AO = MG$.

Lời giải:



Ta có: $\triangle ABC = \triangle MNP \Rightarrow AB = MN, \angle B = \angle N, BC = NP$ (tương ứng).

Mà O là trung điểm BC nên $BO = \frac{1}{2}BC$, G là trung điểm NP nên $NG = \frac{1}{2}NP$.

Từ đó suy ra $BO = NG$.

Xét $\triangle ABO$ và $\triangle MNG$, ta có: $AB = MN, \angle B = \angle N, BO = NG$ (chứng minh trên)

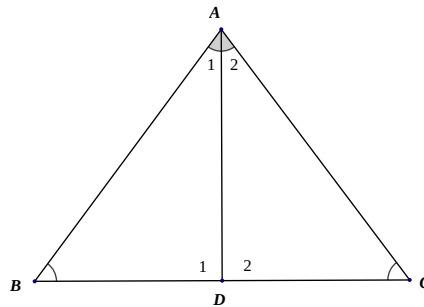
$\Rightarrow \Delta ABO = \Delta MNG$ (c.g.c) $\Rightarrow AO = MG$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 4. MĐ2 Cho tam giác ABC có $B = C$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D .

a) Chứng minh $AB = AC$.

b) Chứng minh $AD \perp BC$.

Lời giải:



a) Xét ΔADB có: $A + B + D_1 = 180^\circ$ (tổng ba góc trong tam giác).

Xét ΔADC có: $C + B + D_2 = 180^\circ$ (tổng ba góc trong tam giác).

Mà: $A_1 = A_2$ (vì AD là phân giác của BAC), $B = C$ (giả thiết) $\Rightarrow D_1 = D_2$.

Xét ΔADB và ΔADC có:

$A_1 = A_2$ (AD là tia phân giác của góc BAC),

AD là cạnh chung,

$D_1 = D_2$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta ADC$ (g.c.g) $\Rightarrow AB = AC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có: $D_1 = D_2$ (chứng minh trên), mà $D_1 + D_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow D_1 = D_2 = 90^\circ$

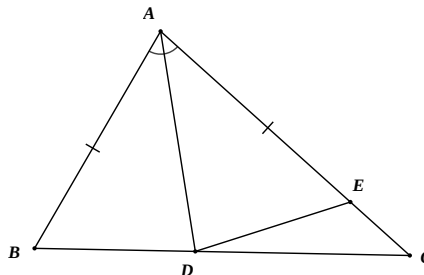
$\Rightarrow AD \perp BC$.

Bài 5. MĐ2 Cho ΔABC có $AB < AC$. Phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Chứng minh:

a) $BD = ED$.

b) DA là tia phân giác của góc BDE .

Lời giải:



a) Xét ΔADB và ΔADE có:

$AE = AB$ (giả thiết),

$BAE = EAD$ (AD là tia phân giác góc A),

AD là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle ADE$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = CE$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có: $\triangle ADB = \triangle ADE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \angle ADB = \angle ADE$ (hai cạnh tương ứng)

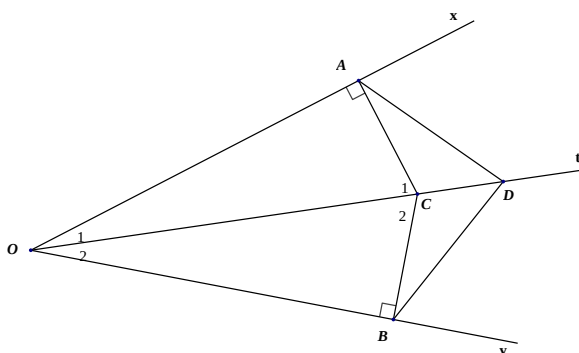
$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của góc BDE .

Bài 6. MĐ2 Cho góc xOy khác góc bẹt và có Ot là tia phân giác. Lấy điểm C thuộc Ot ($C \neq O$). Qua C kẻ đường vuông góc với Ot , cắt Ox, Oy theo thứ tự ở A, B .

a) Chứng minh: $OA = OB$.

b) Lấy điểm D thuộc Ct ($D \neq C$). Chứng minh: $DA = DB$ và $\angle OAD = \angle OBD$.

Lời giải:



a) Xét $\triangle OAC$ có: $\angle O_1 + \angle A + \angle C_1 = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác).

Xét $\triangle OBC$ có: $\angle O_2 + \angle B + \angle C_2 = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác).

Mà $\angle O_1 = \angle O_2$ (vì Ot là phân giác xOy), $\angle A = \angle B (= 90^\circ)$ nên $\angle C_1 = \angle C_2$.

Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$ có:

$\angle O_1 = \angle O_2$ (Ot là tia phân giác xOy),

OC là cạnh chung,

$\angle C_1 = \angle C_2$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC$ (g.c.g)

$\Rightarrow OA = OB$ (hai cạnh tương ứng).

b) Xét $\triangle OAD$ và $\triangle OBD$ có:

$\angle O_1 = \angle O_2$ (Ot là tia phân giác xOy),

OD là cạnh chung,

$OA = OB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle OAD = \triangle OBD$ (c.g.c)

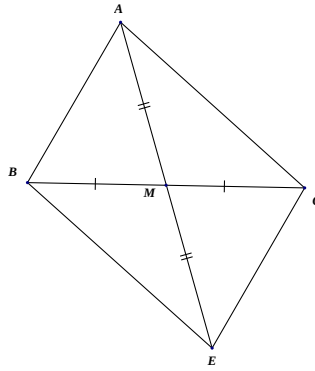
$\Rightarrow AD = BD$ (hai cạnh tương ứng), $\angle OAD = \angle OBD$ (hai góc tương ứng).

Bài 7. MĐ2 Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh:

a) $\triangle ABM = \triangle ECM$.

b) $AB = CE$ và $AC \parallel BE$.

Lời giải:



a) Xét ΔABM và ΔECM có:

$$AM = EM \text{ (giả thiết),}$$

$$BM = CM \text{ (} M \text{ là trung điểm của } BC \text{),}$$

$$\angle AMB = \angle EMC \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ECM \text{ (c.g.c).}$$

b) Ta có: $\Delta ABM = \Delta ECM$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AB = CE$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$$AM = EM \text{ (giả thiết),}$$

$$BM = CM \text{ (} M \text{ là trung điểm của } BC \text{),}$$

$$\angle AMC = \angle EMB \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle ACM = \angle EBM \text{ (hai góc tương ứng).}$$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow AC \parallel BE$.

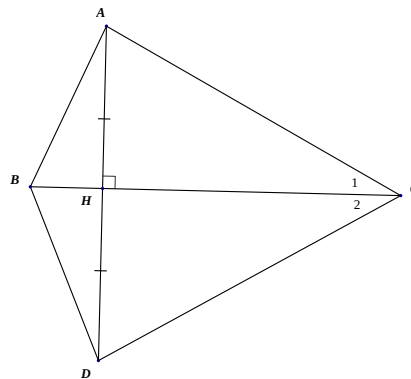
Bài 8. MĐ3 Cho tam giác ABC có $\angle A = 80^\circ$. Dựng AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$.

a) Chứng minh: $AC = DC$.

b) Chứng minh: $\angle ABC = \angle DBC$.

c) Xác định số đo góc BDC .

Lời giải:



a) Xét ΔAHC và ΔDHC có:

$$AH = AD \text{ (giả thiết),}$$

$$HC \text{ là cạnh chung,}$$

$$\angle AHD = \angle DHC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta DHC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AC = DC \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

b) Vì $\Delta AHC = \Delta DHC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow C_1 = C_2$ (hai góc tương ứng).

Xét ΔABC và ΔDBC có:

$$AC = DC \text{ (chứng minh trên),}$$

BC là cạnh chung,

$$C_1 = C_2 \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta DBC \text{ (c.g.c)}$$

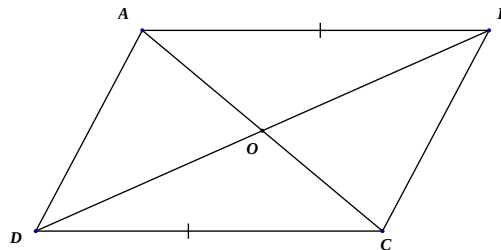
c) Vì $\Delta ABC = \Delta DBC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BDC = BAC$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow BDC = 80^\circ$.

Bài 9. MĐ3 Cho ΔABC trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B , lấy điểm D sao cho $AD \parallel BC$ và $AD = BC$. Chứng minh:

a) $AB = CD$.

b) $AB \parallel CD$ và $\Delta ABD = \Delta CDB$.

Lời giải:



a) Xét ΔABC và ΔCDA có:

$$AD = BC \text{ (giả thiết),}$$

AC là cạnh chung,

$$\angle ACB = \angle DAC \text{ (hai góc so le trong)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AB = CD \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

b) Vì $\Delta ABC = \Delta CDA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \angle BAC = \angle DCA$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow AB \parallel DC$.

Xét ΔABD và ΔCBD có:

$$AD = BC \text{ (giả thiết),}$$

BD là cạnh chung,

$$\angle ABD = \angle CBD \text{ (hai góc so le trong)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta CBD \text{ (c.g.c).}$$

Bài 10. MĐ3 Cho ΔABC có $A = 90^\circ$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D .

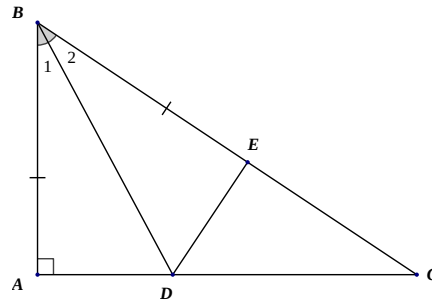
a) Chứng minh: $\Delta ABD = \Delta EBD$.

b) Chứng minh: $DA = DE$.

c) Tính số đo $\angle BED$.

d) Xác định độ lớn góc B để $\widehat{EDB} = \widehat{EDC}$.

Lời giải:



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có:

$BA = BE$ (giả thiết),

$B_1 = B_2$ (BD là tia phân giác góc B),

BD là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c).

b) Vì $\triangle ABD = \triangle EBD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow DA = DE$ (hai cạnh tương ứng).

c) Vì $\triangle ABD = \triangle EBD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ$.

d) Để $\widehat{EDB} = \widehat{EDC}$ thì $\triangle EDB = \triangle EDC \Rightarrow B_2 = C \Rightarrow B = 2C$.

Mà $B + C = 90^\circ \Rightarrow B = 60^\circ$.

Vậy $B = 60^\circ$ thì $\widehat{EDB} = \widehat{EDC}$.

Bài 11. MĐ3 Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Kẻ tia phân giác AD của $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh:

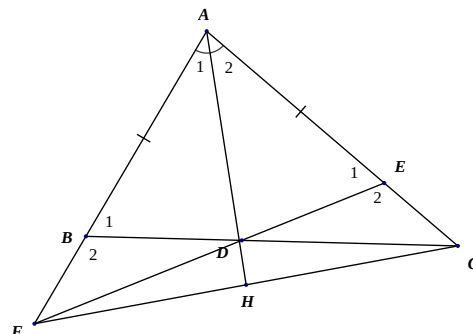
a) $BD = ED$.

b) $BF = EC$

c) $\triangle BDF = \triangle EDC$.

d) $AD \perp FC$.

Lời giải:



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có:

AD là cạnh chung,

$A_1 = A_2$ (AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$),

$AB = AE$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = ED$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có: $AF = AB + BF$, $AC = AE + EC$. Mà $AC = AF$, $AB = AE$ (giả thiết) $\Rightarrow BF = EC$.

c) Vì $\triangle ABD = \triangle AED$ (chứng minh trên) $\Rightarrow B_1 = E_1$ (hai góc tương ứng).

Ta có: $B_1 + B_2 = 180^\circ$, $E_1 + E_2 = 180^\circ$ (kề bù). Mà $B_1 = E_1$ (chứng minh trên) $\Rightarrow B_2 = E_2$.

Xét $\triangle BDF$ và $\triangle EDC$ có: $BD = ED$, $B_2 = E_2$, $BF = EC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle BDF = \triangle EDC$ (c.g.c)

d) Gọi H là giao điểm của AD và FC .

Xét $\triangle AFH$ và $\triangle ACH$ có:

AH là cạnh chung,

$A_1 = A_2$ (AD là tia phân giác của BAC),

$AF = AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle AFH = \triangle ACH$ (c.g.c)

$\Rightarrow AHF = AHC$ (hai góc tương ứng).

Lại có: $AHF + AHC = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow AHF = AHC = 90^\circ \Rightarrow AD \perp FC$.

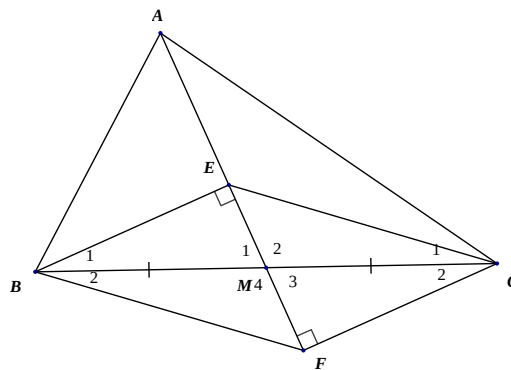
Bài 12. MD4 Cho tam giác ABC ($AB < AC$), tia Ax đi qua trung điểm M của BC . Kẻ BE và CF vuông góc với Ax ($E, F \in Ax$).

a) Chứng minh: $BE \parallel CF$.

b) So sánh BE và FC ; CE và BF .

c) Tìm điều kiện về $\triangle ABC$ để có $BE = CE$.

Lời giải:



a) Ta có: $BE \perp Ax$, $CF \perp Ax$ (giả thiết) $\Rightarrow BE \parallel CF$ (từ vuông góc đến song song).

b) Xét $\triangle MBE$ và $\triangle MCF$ có:

$B_1 = C_2$ (hai góc so le trong),

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC),

$M_1 = M_3$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle MBE = \triangle MCF$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = CF$ (hai cạnh tương ứng).

Xét $\triangle MBF$ và $\triangle MCE$ có:

$B_2 = C_1$ (hai góc so le trong),

$$BM = CM \text{ (} M \text{ là trung điểm của } BC \text{),}$$

$$M_2 = M_4 \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle MBF = \triangle MCE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BF = CE \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

d)

Giả sử $BE = CE$

Xét $\triangle BEM$ và $\triangle CEM$ có: $BE = CE$; $BM = CM$ (cmt); EM là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BEM = \triangle CEM \text{ (c. c. c)}$$

$$\Rightarrow \angle BME = \angle CME \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mặt khác, $\angle BME + \angle CME = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\angle BME = \angle CME = 90^\circ$

Suy ra $EM \perp BC$ hay $AM \perp BC$

Xét $\triangle BAM$ và $\triangle CAM$ có: $\angle BAM = \angle CAM = 90^\circ$; $BM = CM$ (cmt); AM là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BAM = \triangle CAM \text{ (c. g. c)}$$

$$\Rightarrow BA = CA \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A.$$

Vậy $\triangle ABC$ cân tại A thì $BE = CE$.

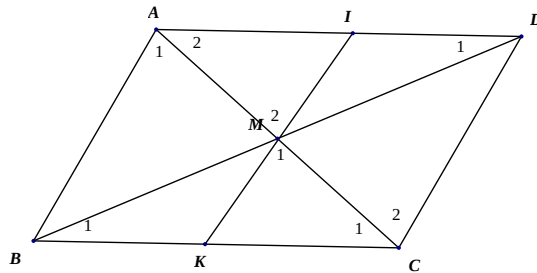
Bài 13. MD4 Cho tam giác ABC . Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng qua C song song với AB ở D . Gọi M là giao điểm của BD và AC .

a) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle CDA$.

b) Chứng minh M là trung điểm của AC .

c) Đường thẳng d qua M cắt các đoạn thẳng AD, BC lần lượt ở I, K . Chứng minh M là trung điểm của IK .

Lời giải:



a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có:

$$\angle A_2 = \angle C_1 \text{ (} AD \parallel BC \text{; hai góc so le trong),}$$

AC là cạnh chung,

$$\angle A_1 = \angle C_2 \text{ (} AB \parallel DC \text{; hai góc so le trong),}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA \text{ (g.c.g).}$$

b) Vì $\triangle ABC = \triangle CDA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AD = BC$ (hai cạnh tương ứng).

Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có:

$$\angle A_2 = \angle C_1 \text{ (} AD \parallel BC \text{, hai góc so le trong),}$$

AC là cạnh chung,

$$B_1 = D_1 \text{ (} AD \parallel BC \text{, hai góc so le trong)}$$

$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle CMB$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = CM$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow M$ là trung điểm của AC .

c) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle CMK$ có:

$$A_2 = C_1 \text{ (} AD \parallel BC \text{, hai góc so le trong),}$$

$$AM = CM \text{ (chứng minh trên),}$$

$$M_2 = M_1 \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

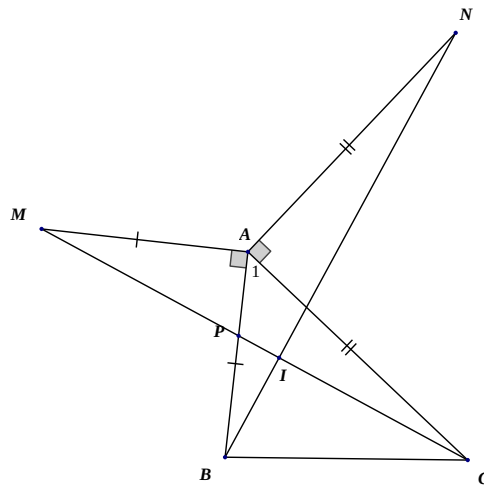
$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle CMK$ (g.c.g) $\Rightarrow MI = MK$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow M$ là trung điểm của IK .

Bài 14. MĐ4 Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AB và $AD = AB$ (D, C khác phía so với AB). Vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AC và $AE = AC$ (E, B khác phía so với AC). Chứng minh:

a) $BE = DC$.

b) $BE \perp DC$.

Lời giải:



a) Vì $AD \perp AB$ (giả thiết) nên $BAD = 90^\circ$; $AE \perp AC$ (giả thiết) nên $CAE = 90^\circ$.

Ta có: $DAC = BAD + A_1 = 90^\circ + A_1$ và $BAE = CAE + A_1 = 90^\circ + A_1 \Rightarrow DAC = BAE$.

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$: $AD = AB$, $AC = AE$ (giả thiết), $DAC = BAE$ (chứng minh trên)
 $\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ (c.g.c).

Vì $\triangle DAC = \triangle BAE$ (chứng minh trên) nên $DC = BE$, $C_1 = E$ (tương ứng).

b) Gọi P là giao điểm AB và CD ; I là giao điểm BE và CD .

Ta có $ADC + APD = 90^\circ$ (vì $\triangle ADP$ vuông).

Lại có: $\triangle DAC = \triangle BAE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow ADC = ABE$ hay $ADP = PBI$.

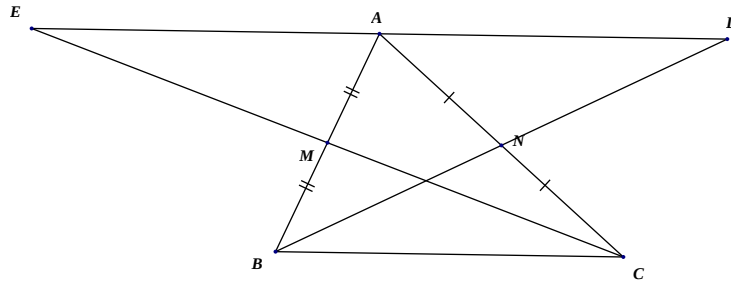
$\Rightarrow ABE + BPI = 90^\circ \Rightarrow BE \perp CD$.

Bài 15. MĐ4 Cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Lấy điểm E, D sao cho M, N là trung điểm của CE, BD .

a) Chứng minh: $AD \parallel BC$.

b) Chứng minh: A, E, D thẳng hàng.

Lời giải:



a) Xét ΔAND và ΔCNB :

$NA = NC$ (vì N là trung điểm của AC),

$ND = NB$ (vì N là trung điểm của BD),

$\angle AND = \angle BNC$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta AND = \Delta CNB$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle DAN = \angle NCB$ (2 góc tương ứng).

Mà $\angle DAN$ và $\angle NCB$ là 2 góc so le trong nên $DA \parallel BC$.

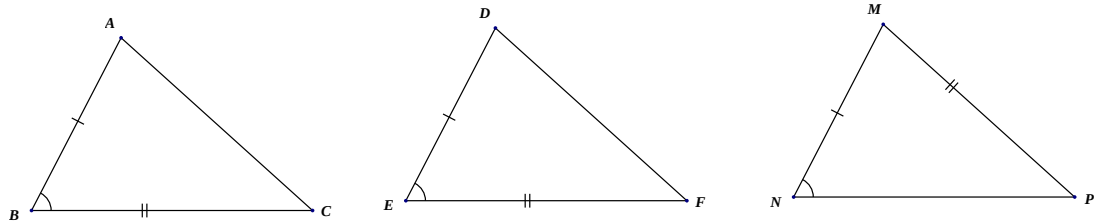
b) Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được: $AE \parallel BC$.

Như vậy: $AE \parallel BC$, $DA \parallel BC$ nên A, D, E thẳng hàng (tiên đề Ôclit về đường thẳng song song).

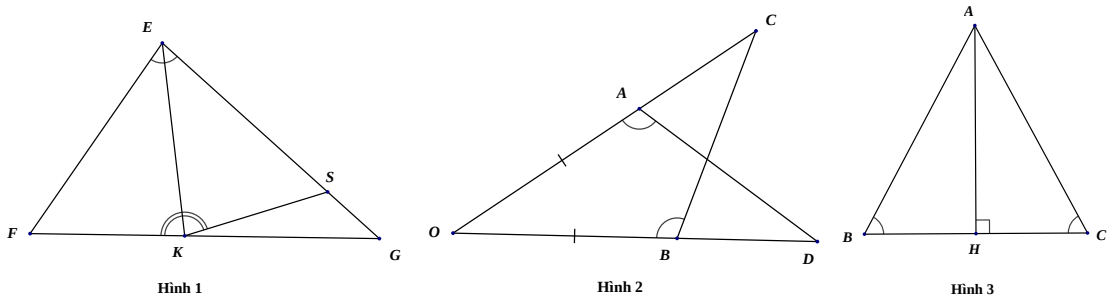
Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

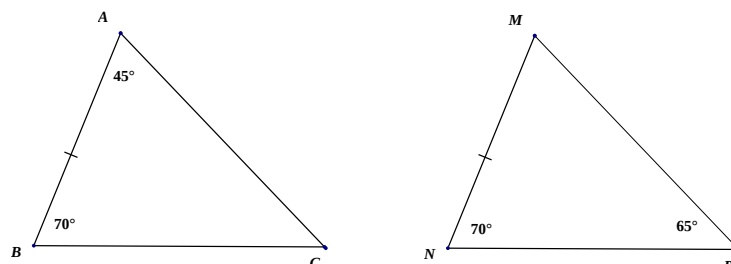
Bài 1. MD1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Bài 2. MD1 Trên mỗi hình 1, hình 2, hình 3 có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Bài 3. MD1 Cho hình vẽ, chứng minh $\Delta ABC = \Delta MNP$.



Bài 4. MD2 Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi AD là đường phân giác góc A của tam giác ABC . Gọi ME là đường phân giác góc M của tam giác MNP . Chứng minh $\Delta ABD = \Delta MNE$.

Bài 5. MD3 Cho góc xAy . Lấy điểm B trên Ax , điểm D trên Ay sao cho $AB = AD$. Trên tia Bx lấy điểm E , trên tia Dy lấy điểm C sao cho $BE = DC$. Chứng minh $\triangle ABC = \triangle ADE$.

Bài 6. MD4 Cho $\triangle ABC$ có D là trung điểm của BC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A , vẽ tia $Bx \parallel AC$, Bx cắt tia AD ở E .

a) Chứng minh $\triangle ADC = \triangle EDB$.

b) Trên tia đối của tia AC , lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Gọi I là giao điểm của AB và EF . Chứng minh $\triangle AIF = \triangle BIE$.

Dạng 2.

Bài 1. MD1 Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB . Chứng minh rằng: $BM = CN$.

Bài 2. MD2 Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$, phân giác AM ($M \in BC$). Chứng minh:

a) $\triangle ABM = \triangle ACM$.

b) M là trung điểm của BC và $AM \perp BC$.

Bài 3. MD2 Cho tam giác ABC có: $AB = AC$ và M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N . Chứng minh M là trung điểm của AN .

Bài 4. MD2 Cho $\triangle ABC$, có $B = C$ và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D . Tia phân giác của góc C cắt AB ở E .

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE .

b) Gọi I là giao điểm BD và EC . Chứng minh $BI = IC, IE = ID$.

Bài 5. MD3 Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , vẽ tia Bx, Cy lần lượt cắt hai cạnh AC, AB tại D, E sao cho $ABD = ACE$.

a) Chứng minh $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BD và CE . Chứng minh $\triangle EBI = \triangle DCI$.

c) Chứng minh $AI \perp BC$.

Bài 6. MD4 Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC . Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho $ND = NB$. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MC$. Chứng minh:

a) $AD = BC$.

b) $AE \parallel BC$.

c) A là trung điểm của DE .

Bài 7. MD4 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB . Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BN và CM . Chứng minh:

a) $\triangle AMC = \triangle ABN$.

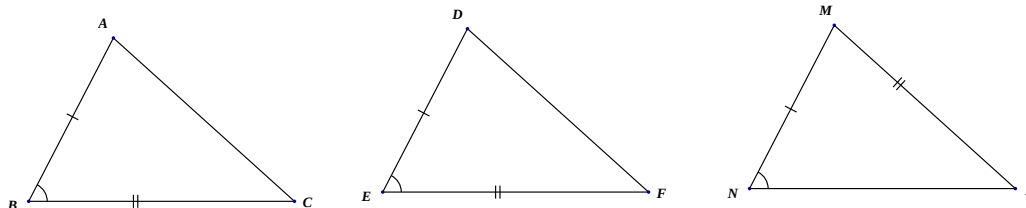
b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$.

c) $AI = AK$ và $AI \perp IK$.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác bằng nhau

Bài 1. MD1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?

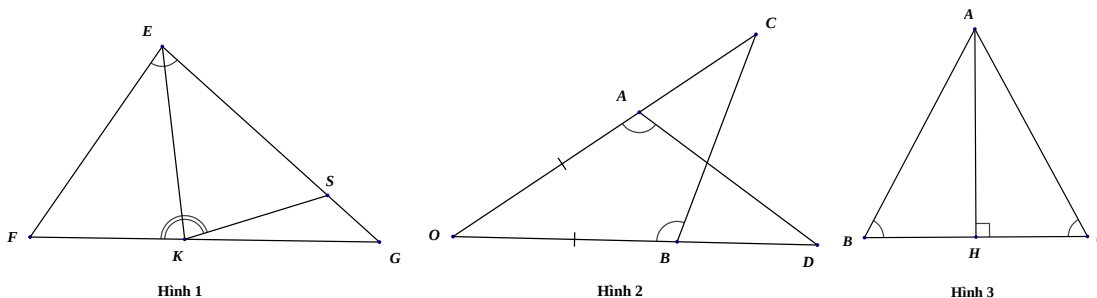


Lời giải:

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ có: $AB = DE$; $B = E$; $BC = EF$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$ (c.g.c).

Bài 2. MD1 Trên mỗi hình 1, hình 2, hình 3 có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Lời giải:

- Hình 1.

Xét $\triangle FEK$ và $\triangle SEK$ có:

$FEK = SEK$ (giả thiết),

EK là cạnh chung,

$FKE = SKE$ (giả thiết).

Vậy $\triangle FEK = \triangle SEK$ (g.c.g).

- Hình 2.

Xét $\triangle OAD$ và $\triangle OBC$ có:

$OAD = OBC$ (giả thiết),

$OA = OB$ (giả thiết),

O là góc chung.

Vậy $\triangle OAD = \triangle OBC$ (g.c.g).

- Hình 3.

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có:

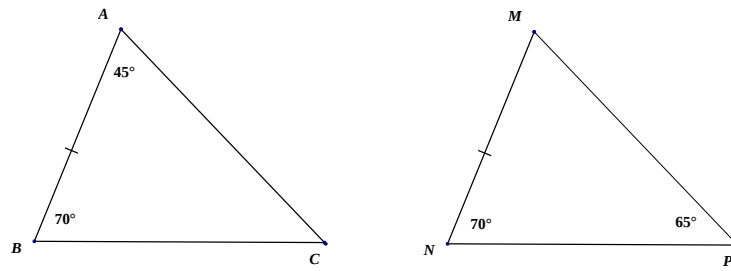
$AHB = AHC = 90^\circ$ (giả thiết),

$HB = HC$ (giả thiết),

$B = C$ (giả thiết).

Vậy $\triangle AHB = \triangle AHC$ (g.c.g).

Bài 3. MD1 Cho hình vẽ, chứng minh $\triangle ABC = \triangle MNP$.



Lời giải:

$\triangle MNP$ có: $M + N + P = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác).

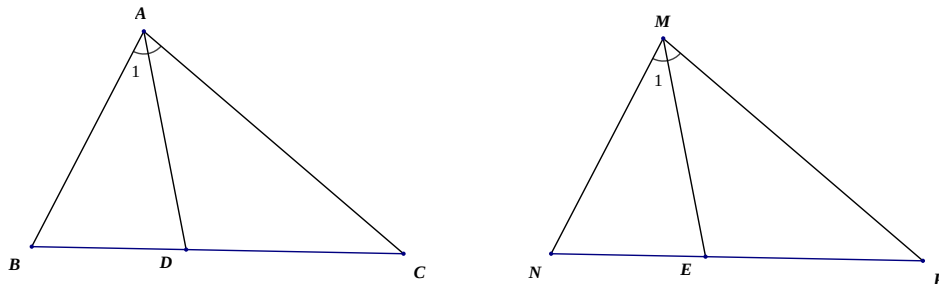
Suy ra $M = 180^\circ - (N + P) = 180^\circ - (70^\circ + 65^\circ) = 45^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ có: $A = M (= 45^\circ)$, $AB = MN$ (giả thiết), $B = N (= 70^\circ)$.

Vậy $\triangle ABC = \triangle MNP$ (g.c.g).

Bài 4. MD2 Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Gọi AD là đường phân giác góc A của tam giác ABC . Gọi ME là đường phân giác góc M của tam giác MNP . Chứng minh $\triangle ABD = \triangle MNE$.

Lời giải:



Ta có: $\triangle ABC = \triangle MNP$ suy ra $B = N$; $A = M$; $AB = MN$ (tương ứng).

Mặt khác: AD là đường phân giác của A nên $A_1 = \frac{1}{2} \cdot A$,

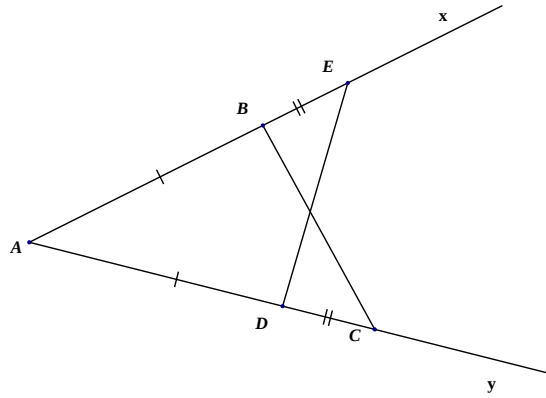
ME là đường phân giác của M nên $M_1 = \frac{1}{2} \cdot M$.

Do đó $A_1 = M_1$.

Xét tam giác ABD và tam giác MNE có: $B = N$, $AB = MN$, $A_1 = M_1$ (chứng minh trên).

Suy ra $\triangle ABD = \triangle MNE$ (g.c.g).

Bài 5. MD3 Cho góc xAy . Lấy điểm B trên Ax , điểm D trên Ay sao cho $AB = AD$. Trên tia Bx lấy điểm E , trên tia Dy lấy điểm C sao cho $BE = DC$. Chứng minh $\triangle ABC = \triangle ADE$.



Lời giải:

Ta có: $AE = AB + BE$; $AC = AD + DC$. Mà: $AB = AD$; $BE = DC$ (giả thiết) nên $AE = AC$.

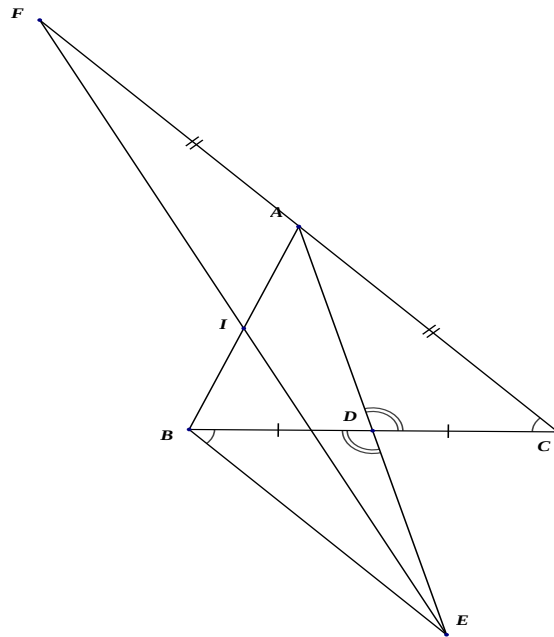
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có: $AE = AC$ (chứng minh trên); $\angle A$ là góc chung; $AB = AD$ (giả thiết)
 $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADE$ (c.g.c).

Bài 6. MĐ4 Cho $\triangle ABC$ có D là trung điểm của BC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A , vẽ tia $Bx \parallel AC$, Bx cắt tia AD ở E .

a) Chứng minh $\triangle ADC = \triangle EDB$.

b) Trên tia đối của tia AC , lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Gọi I là giao điểm của AB và EF . Chứng minh $\triangle AIF = \triangle BIE$.

Lời giải:



a) Ta có $AC \parallel BE \Rightarrow \angle ACD = \angle DBE$ (2 góc so le trong).

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle EDB$ có:

$\angle ACD = \angle DBE$ (chứng minh trên),

$CD = BD$ (giả thiết),

$\angle ADC = \angle EDB$ (hai góc đối đỉnh).

Vậy $\triangle ADC = \triangle EDB$ (g.c.g).

b) Vì $\triangle ADC = \triangle EDB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AC = EB$ (hai cạnh tương ứng).

Mà $AF = AC$ (giả thiết) $\Rightarrow AF = BE$.

Vì $AC \parallel BE$ (giả thiết), $F \in AC \Rightarrow AF \parallel BE \Rightarrow \angle FAI = \angle IBE$, $\angle AFI = \angle BEI$ (góc so le trong).

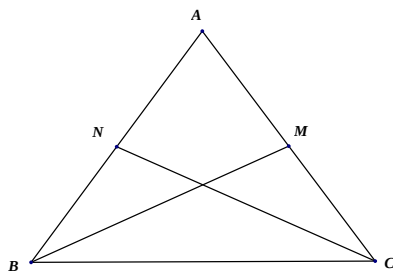
Xét $\triangle AIF$ và $\triangle BIE$ có: $\angle FAI = \angle IBE$, $AF = BE$, $\angle AFI = \angle BEI$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle AIF = \triangle BIE$ (g.c.g).

Dạng 2. Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh một tính chất khác

Bài 1. MĐ1 Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB . Chứng minh rằng: $BM = CN$.

Lời giải:



Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, AB \Rightarrow AM = \frac{1}{2}AC; AN = \frac{1}{2}AB$.

Lại có: $AB = AC$ (giả thiết) $\Rightarrow AM = AN$.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có:

$AB = AC$ (giả thiết),

$\angle A$ là góc chung,

$AM = AN$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c)

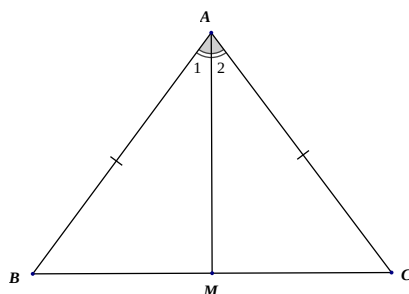
$\Rightarrow BM = CN$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$, phân giác AM ($M \in BC$). Chứng minh:

a) M là trung điểm của BC .

b) $AM \perp BC$.

Lời giải:



a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$AB = AC$ (giả thiết),

AM là cạnh chung,

$\angle 1 = \angle 2$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM$ (c.g.c)

$\Rightarrow BM = CM$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BC .

b) Vì $\triangle ABM = \triangle ACM$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC$ (hai góc tương ứng).

Lại có: $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC$.

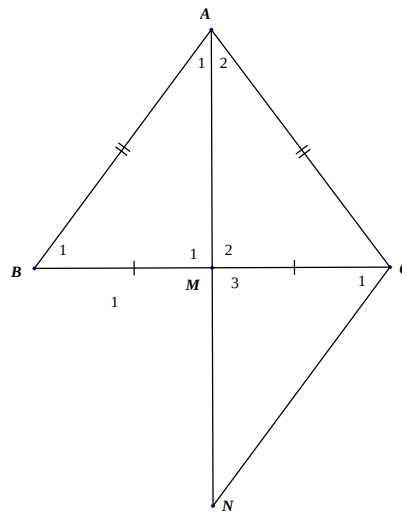
Bài 3. MD2 Cho tam giác ABC có: $AB = AC$ và M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N . Chứng minh M là trung điểm của AN .

Lời giải:



a) Xét tam giác ABM và tam giác ACM , ta có:

$AB = AC$ (giả thiết),

$BM = MC$ (M là trung điểm của BC),

AM là cạnh chung

Suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2$ (hai góc tương ứng) hay AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Ta có $\triangle ABM = \triangle ACM$ nên $\angle M_1 = \angle M_2$ (hai góc tương ứng).

Mà $\angle M_1 + \angle M_2 = 180^\circ$ (kề bù) nên $\angle M_1 = \angle M_2 = 90^\circ$. Hay $AM \perp BC$.

c) Ta có $CN \parallel AB$ suy ra $\angle B_1 = \angle C_1$ (hai góc so le trong).

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle NCM$, ta có:

$\angle M_1 = \angle M_3$ (hai góc đối đỉnh),

$MB = MC$ (M là trung điểm của BC),

$\angle B_1 = \angle C_1$ (chứng minh trên)

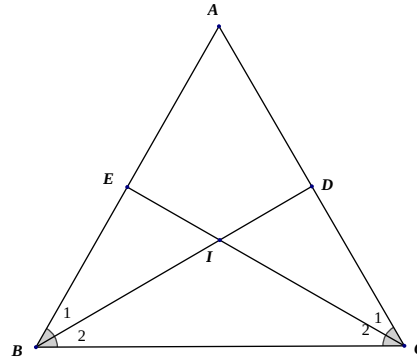
Suy ra $\triangle ABM = \triangle NCM$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = MN$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 4. MD2 Cho $\triangle ABC$, có $B = C$ và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D . Tia phân giác của góc C cắt AB ở E .

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE .

b) Gọi I là giao điểm BD và EC . Chứng minh $BI = IC$, $IE = ID$.

Lời giải:



a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE .

Ta có:

$$B_1 = B_2 = \frac{ABC}{2} \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } ABC \text{)}, \quad (1)$$

$$C_1 = C_2 = \frac{ACB}{2} \text{ (vì } CE \text{ là tia phân giác của } ACB \text{)}, \quad (2)$$

$$ABC = ACB \text{ (giả thiết)}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $B_1 = B_2 = C_1 = C_2$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có

$$AB = AC \text{ (giả thiết)},$$

$$\angle BAC \text{ là góc chung},$$

$$B_1 = C_1 \text{ (chứng minh trên)}.$$

Do đó $\triangle ABD = \triangle ACE$ (g.c.g).

Suy ra $BD = CE$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có $AB = AC$ (giả thiết), $AD = AE$ (vì $\triangle ABD = \triangle ACE$).

Nên $AB - AE = AC - AD \Rightarrow BE = CD$.

Ta lại có $\triangle ABD = \triangle ACE$ (cm câu a) $\Rightarrow \angle ADB = \angle AEC$ (hai góc tương ứng).

Mặt khác: $\angle ADB + \angle IDC = 180^\circ$ (hai góc kề bù); $\angle AEC + \angle IEB = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\angle IDC = \angle IEB$.

Xét $\triangle EBI$ và $\triangle DCI$ có:

$$B_1 = C_1 \text{ (chứng minh ở câu a)},$$

$$BE = CD \text{ (chứng minh trên)},$$

$$\angle IDC = \angle IEB \text{ (chứng minh trên)}.$$

Do đó $\triangle EBI = \triangle DCI$ (g.c.g).

Suy ra $BI = IC$, $IE = ID$ (hai cạnh tương ứng).

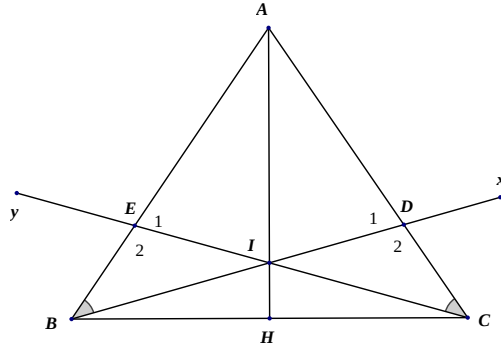
Bài 5. MD3 Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , vẽ tia Bx , Cy lần lượt cắt hai cạnh AC , AB tại D, E sao cho $\angle ABD = \angle ACE$.

a) Chứng minh $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BD và CE . Chứng minh $\triangle EBI = \triangle DCI$.

c) Chứng minh $AI \perp BC$.

Lời giải:



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$\angle BAC$ là góc chung,

$AB = AC$ (giả thiết),

$\angle ABD = \angle ACE$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (g - c - g) $\Rightarrow AD = AE$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có $AB = AC$ (giả thiết), $AD = AE$ (cm câu a).

Nên $AB - AE = AC - AD \Rightarrow BE = CD$.

Ta lại có $\triangle ABD = \triangle ACE$ (cm câu a) $\Rightarrow \angle E_1 = \angle D_1$ (hai góc tương ứng).

Mặt khác: $\angle E_1 + \angle E_2 = 180^\circ$; $\angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \angle E_2 = \angle D_2$.

Xét $\triangle EBI$ và $\triangle DCI$ có

$\angle EBI = \angle DCI$ (giả thiết),

$BE = CD$ (chứng minh trên),

$\angle E_2 = \angle D_2$ (chứng minh trên),

$\Rightarrow \triangle EBI = \triangle DCI$ (g.c.g).

c) Gọi H là giao điểm của AI và BC .

Xét $\triangle AEI$ và $\triangle ADI$ có:

AI là cạnh chung,

$AE = AD$ (chứng minh trên câu a),

$EI = DI$ (vì $\triangle EBI = \triangle DCI$).

$\Rightarrow \triangle AEI = \triangle ADI$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle EAI = \angle DAI$ (hai góc tương ứng) hay $\angle BAH = \angle CAH$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có:

AI là cạnh chung,

$BAH = CAH$ (chứng minh trên),

$AB = AC$ (giả thiết).

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow AHB = AHC$ (hai góc tương ứng).

Mà $AHB + AHC = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow AHB = AHC = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Vậy $AH \perp BC$ hay $AI \perp BC$.

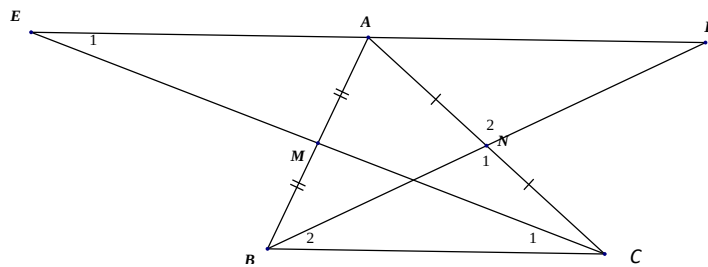
Bài 6. MD4 Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC . Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho $ND = NB$. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MC$. Chứng minh :

a) $AD = BC$.

b) $AE \parallel BC$.

c) A là trung điểm của DE .

Lời giải:



a) Xét $\triangle AND$ và $\triangle CNB$, ta có :

$AN = NC$ (N là trung điểm của cạnh AC),

$N_2 = N_1$ (đối đỉnh),

$ND = NB$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle AND = \triangle CNB$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Chứng minh tương tự ta có: $\triangle AME = \triangle BMC$ (c.g.c), nên $E_1 = C_1$ (hai góc tương ứng).

Mà E_1 và C_1 ở vị trí so le trong nên $AE \parallel BC$.

c) Vì $\triangle AND = \triangle CNB$ nên $D_1 = B_2$ (hai góc tương ứng).

Mà D_1 và B_2 ở vị trí so le trong nên $AD \parallel BC$.

Ta có: $AD \parallel BC$ và $AE \parallel BC$ suy ra D, A, E thẳng hàng (theo tiên đề Ôclit).

Vì $\triangle AME = \triangle BMC \Rightarrow AE = BC$ (hai cạnh tương ứng).

Mà $AD = BC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AE = AD$. Suy ra A là trung điểm của ED .

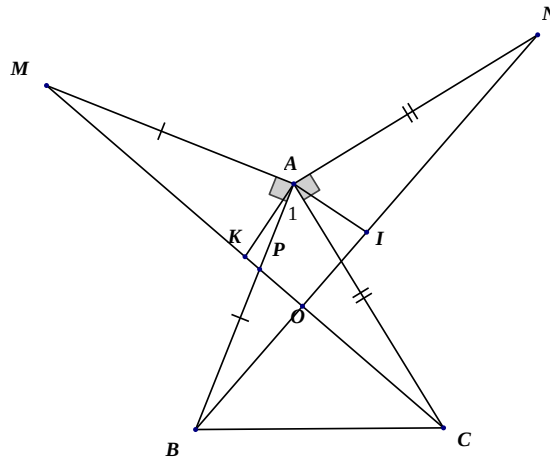
Bài 7. MD4 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB . Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BN và CM . Chứng minh :

a) $\triangle AMC = \triangle ABN$.

b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$

c) $AI = AK$ và $AI \perp AK$.

Lời giải:



a) Vì $AM \perp AB$ (giả thiết) nên $BAM = 90^\circ$; $AN \perp AC$ (giả thiết) nên $CAN = 90^\circ$.

Ta có: $MAC = BAM + A_1 = 90^\circ + A_1$ và $BAN = CAN + A_1 = 90^\circ + A_1 \Rightarrow MAC = BAN$.

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle BAN$:

$AM = AB$ (giả thiết),

$AC = AN$ (giả thiết),

$MAC = BAN$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle MAC = \triangle BAN$ (c.g.c).

b) Gọi P là giao điểm AB và CM ; O là giao điểm BN và CM .

Ta có: $AMC + APM = 90^\circ$ (vì $\triangle AMP$ vuông tại A).

Lại có: $\triangle MAC = \triangle BAN$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AMC = ABN$ (hai góc tương ứng) hay $AMP = PBO$

$\Rightarrow ABN + BPO = 90^\circ \Rightarrow BN \perp CM$.

c) Ta có K, I lần lượt là trung điểm của CM, BN .

Mà $CM = BN$ (chứng minh trên) $\Rightarrow MK = BI$.

Xét $\triangle AMK$ và $\triangle ABI$ có:

$AMK = ABN$ (chứng minh trên),

$AM = AB$ (chứng minh trên),

$MK = BI$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle AMK = \triangle ABI$ (c.g.c)

$\Rightarrow AK = AI$ (hai cạnh tương ứng) và $MAK = BAI$ (hai góc tương ứng).

Mà $MAK + KAB = 90^\circ \Rightarrow BAI + KAB = 90^\circ$ hay $AI \perp AK$.

PHIẾU BÀI TẬP

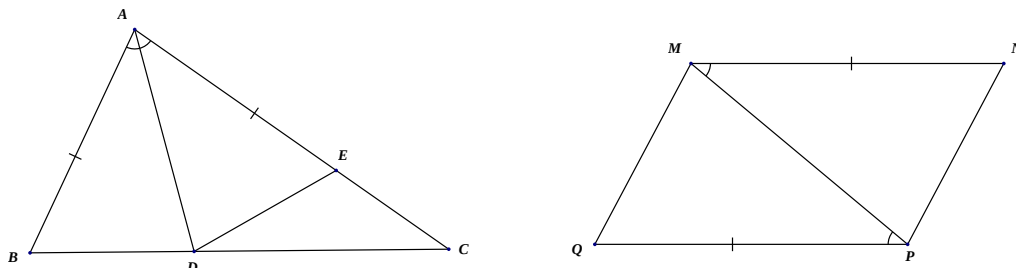
Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác bằng nhau

I. Phương pháp giải:

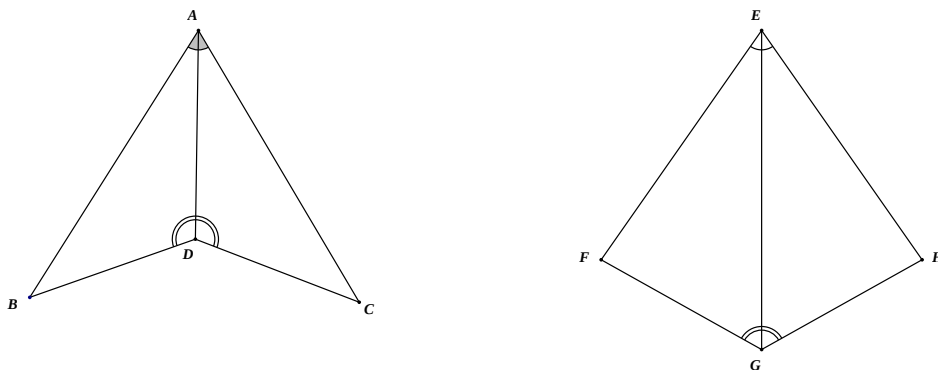
- + Xét hai tam giác.
- + Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc.
- + Kết luận hai tam giác bằng nhau.

II. Bài toán.

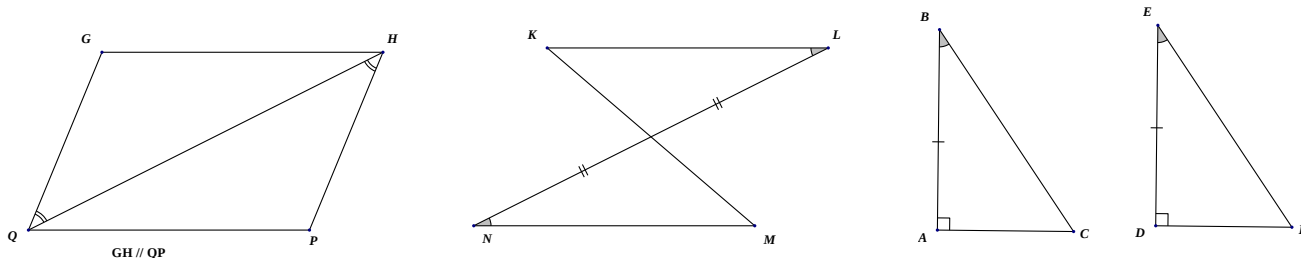
Bài 1. MD1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



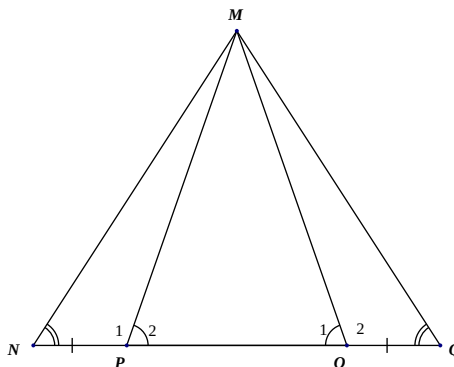
Bài 2. MD1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



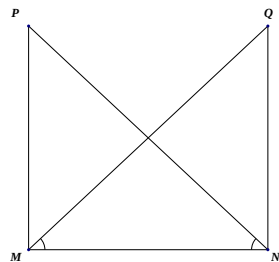
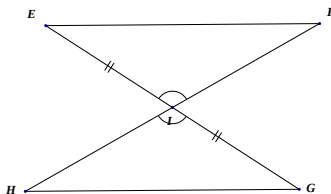
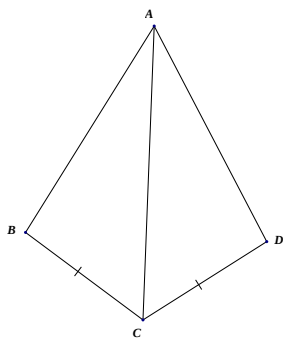
Bài 3. MD1 Trong các hình vẽ sau, có hai tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



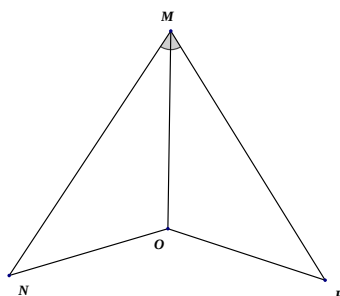
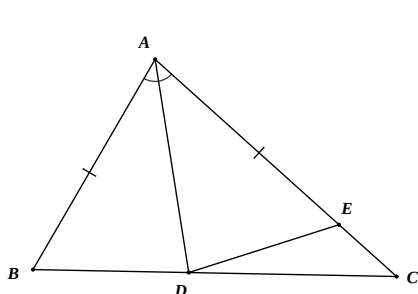
Bài 4. MD1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Bài 5. MD2 Nêu thêm một điều kiện để mỗi hình dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh.



Bài 6. MD2 Nêu thêm một điều kiện để mỗi hình dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc.



Bài 7. MD2 Qua trung điểm I của đoạn thẳng AB , kẻ đường thẳng vuông góc với AB , trên đường thẳng vuông góc đó lấy hai điểm C và D . Nối CA, CB, DA, DB . Tìm các cặp tam giác bằng nhau.

Bài 8. MD2 Cho tam giác ABC , kẻ AH vuông góc với BC , ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA lấy điểm K sao cho $HK = HA$, nối KB, KC . Tìm các cặp tam giác bằng nhau.

Bài 9. MD2 Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi AM là tia phân giác góc A . Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACM$.

Bài 10. MD2 Cho tam giác ABC có $B = C$. Gọi AM là tia phân giác góc A . Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACM$.

Bài 11. MD2 Cho Oz là tia phân giác góc xOy . Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA = OB$. Chứng minh $\triangle OAC = \triangle OBC$.

Bài 12. MD3 Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên cạnh Ox lấy hai điểm A và B , trên cạnh Oy lấy hai điểm C và D , sao cho $OA = OC; OB = OD$.

a) Chứng minh $\triangle OAD = \triangle OCB$.

b) Chứng minh $\triangle ACD = \triangle CAB$.

Bài 13. MD3 Cho $\triangle ABC$ vuông ở A . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

a) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle ABD$.

b) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M . Chứng minh $\triangle MBD = \triangle MBC$.

Bài 14. MD3 Cho hình vẽ sau, trong đó $AB \parallel CD, AB = CD$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle OAB = \triangle ODC$.

b) $\triangle OAC = \triangle ODB$.

Bài 15. MD4 Cho góc nhọn xOy có tia Oz là tia phân giác. Qua điểm A thuộc tia Ox , vẽ đường thẳng song song với Oy cắt Oz tại M . Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại B .

a) Chứng minh $\triangle OAM = \triangle MBO$.

b) Từ M vẽ $MH \perp Ox; MK \perp Oy$. Chứng minh $\triangle MHO = \triangle MKO$.

Bài 16. MD4 Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$ và $AB = AC$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N . Tia ND cắt tia CA tại I . Chứng minh rằng:

a) $\triangle AID = \triangle ABE$.

b) Chứng minh $CM = MN$.

Bài 17. MD4 Cho $\triangle ABC$, kẻ BD vuông góc với AC , CE vuông góc với AB . Trên tia đối của tia BD , lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh $AH = AK$.

Dạng 2. Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh một tính chất khác

I. Phương pháp giải:

- + Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.
- + Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo một trong hai trường hợp cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc rồi suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau. Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc.
- + Kết hợp với các tính chất đã học về tia phân giác, đường thẳng song song, đường trung trực, tổng ba góc trong một tam giác, ... để chứng minh một tính chất khác.

II. Bài toán.

Bài 1. MD1 Cho tam giác ABC có $AB = AC$, tia phân giác của góc A cắt BC tại M . Chứng minh: $BM = CM$.

Bài 2. MD1 Cho góc nhọn xOy có Om là tia phân giác, $C \in Om$ ($C \neq O$). Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Chứng minh: $CA = CB$.

Bài 3. MD1 Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Gọi O và G lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và NP . Chứng minh $AO = MG$.

Bài 4. MD2 Cho tam giác ABC có $B = C$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D .

a) Chứng minh $AB = AC$.

b) Chứng minh $AD \perp BC$.

Bài 5. MD2 Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Chứng minh:

a) $BD = ED$.

b) DA là tia phân giác của góc BDE .

Bài 6. MD2 Cho góc xOy khác góc bẹt và có Ot là tia phân giác. Lấy điểm C thuộc Ot ($C \neq O$). Qua C kẻ đường vuông góc với Ot , cắt Ox, Oy theo thứ tự ở A, B .

a) Chứng minh: $OA = OB$.

b) Lấy điểm D thuộc Ot ($D \neq C$). Chứng minh: $DA = DB$ và $OAD = OBD$.

Bài 7. MD2 Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh:

a) $\triangle ABM = \triangle ECM$.

b) $AB = CE$ và $AC \parallel BE$.

Bài 8. MD3 Cho tam giác ABC có $A = 80^\circ$. Dựng AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$.

a) Chứng minh: $AC = DC$.

b) Chứng minh: $\triangle ABC = \triangle DBC$.

c) Xác định số đo góc BDC .

Bài 9. MD3 Cho $\triangle ABC$ trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B , lấy điểm D sao cho $AD \parallel BC$ và $AD = BC$. Chứng minh:

a) $AB = CD$.

b) $AB \parallel CD$ và $\triangle ABD = \triangle CDB$.

Bài 10. MD3 Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D .

a) Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle EBD$.

b) Chứng minh: $DA = DE$.

c) Tính số đo BED .

d) Xác định độ lớn góc B để $EDB = EDC$.

Bài 11. MD3 Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Kẻ tia phân giác AD của BAC ($D \in BC$). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh:

a) $BD = ED$.

b) $BF = EC$

c) $\triangle BDF = \triangle EDC$.

d) $AD \perp FC$.

Bài 12. MD4 Cho tam giác ABC ($AB < AC$), tia Ax đi qua trung điểm M của BC . Kẻ BE và CF vuông góc với Ax ($E, F \in Ax$).

a) Chứng minh: $BE \parallel CF$.

b) So sánh BE và FC ; CE và BF .

c) Tìm điều kiện về $\triangle ABC$ để có $BE = CE$.

Bài 13. MD4 Cho tam giác ABC . Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng qua C song song với AB ở D . Gọi M là giao điểm của BD và AC .

a) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle CDA$.

b) Chứng minh M là trung điểm của AC .

c) Đường thẳng d qua M cắt các đoạn thẳng AD, BC lần lượt ở I, K . Chứng minh M là trung điểm của IK .

Bài 14. MD4 Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AB và $AD = AB$ (D, C khác phía so với AB). Vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AC và $AE = AC$ (E, B khác phía so với AC). Chứng minh:

a) $BE = DC$.

b) $BE \perp DC$.

Bài 15. MD4 Cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Lấy điểm E, D sao cho M, N là trung điểm của CE, BD .

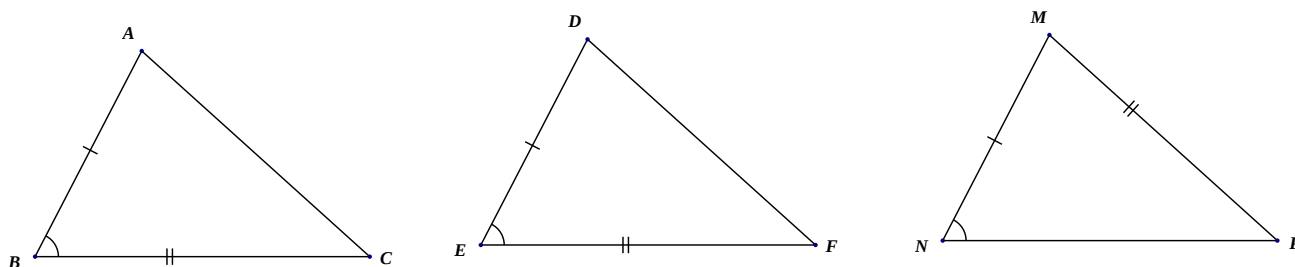
a) Chứng minh: $AD \parallel BC$.

b) Chứng minh: A, E, D thẳng hàng.

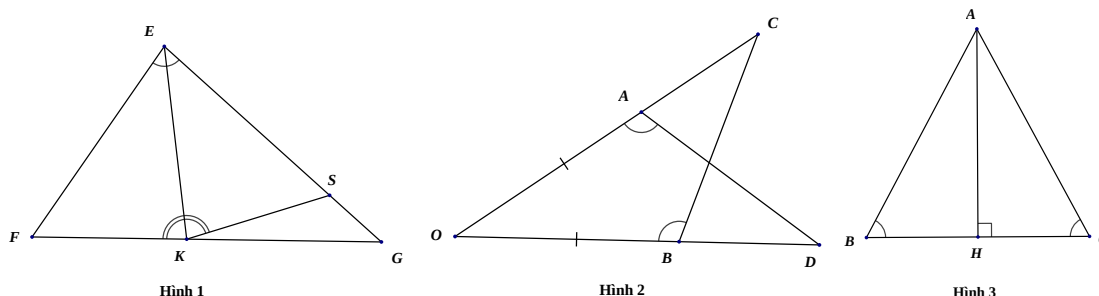
Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác bằng nhau

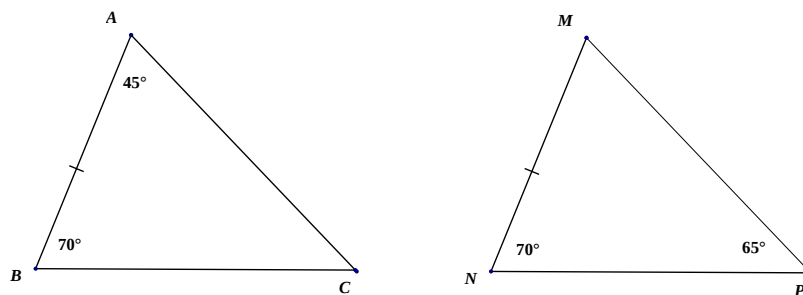
Bài 1. MD1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Bài 2. MD1 Trên mỗi hình 1, hình 2, hình 3 có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Bài 3. MD1 Cho hình vẽ, chứng minh $\triangle ABC = \triangle MNP$.



Bài 4. MD2 Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Gọi AD là đường phân giác góc A của tam giác ABC . Gọi ME là đường phân giác góc M của tam giác MNP . Chứng minh $\triangle ABD = \triangle MNE$.

Bài 5. MD3 Cho góc xAy . Lấy điểm B trên Ax , điểm D trên Ay sao cho $AB = AD$. Trên tia Bx lấy điểm E , trên tia Dy lấy điểm C sao cho $BE = DC$. Chứng minh $\triangle ABC = \triangle ADE$.

Bài 6. MD4 Cho $\triangle ABC$ có D là trung điểm của BC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A , vẽ tia $Bx \parallel AC$, Bx cắt tia AD ở E .

a) Chứng minh $\triangle ADC = \triangle EDB$.

b) Trên tia đối của tia AC , lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Gọi I là giao điểm của AB và EF . Chứng minh $\triangle AIF = \triangle BIE$.

Dạng 2. Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh một tính chất khác

Bài 1. MD1 Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB . Chứng minh rằng: $BM = CN$.

Bài 2. MD2 Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$, phân giác AM ($M \in BC$). Chứng minh:

a) $\triangle ABM = \triangle ACM$.

b) M là trung điểm của BC và $AM \perp BC$.

Bài 3. MD2 Cho tam giác ABC có: $AB = AC$ và M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N . Chứng minh M là trung điểm của AN .

Bài 4. MD2 Cho $\triangle ABC$, có $B = C$ và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D . Tia phân giác của góc C cắt AB ở E .

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE .

b) Gọi I là giao điểm BD và EC . Chứng minh $BI = IC, IE = ID$.

Bài 5. MD3 Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , vẽ tia Bx, Cy lần lượt cắt hai cạnh AC, AB tại D, E sao cho $ABD = ACE$.

a) Chứng minh $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BD và CE . Chứng minh $\triangle EBI = \triangle DCI$.

c) Chứng minh $AI \perp BC$.

Bài 6. MD4 Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC . Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho $ND = NB$. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MC$. Chứng minh:

a) $AD = EC$.

b) $AE \parallel BC$.

c) A là trung điểm của DE .

Bài 7. MD4 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB; AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB . Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BN và CM . Chứng minh:

- a) $\triangle AMC = \triangle ABN$.
- b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$.
- c) $AI = AK$ và $AI \perp AK$.