

BÀI 5. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC

GÓC – CẠNH – GÓC (G.C.G)

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được cách vẽ tam giác biết một cạnh và hai góc kề.
- + Phát biểu và hiểu được trường hợp bằng nhau góc - cạnh – góc.
- + Phát biểu và nắm được các hệ quả của trường hợp góc - cạnh - góc trong tam giác vuông.

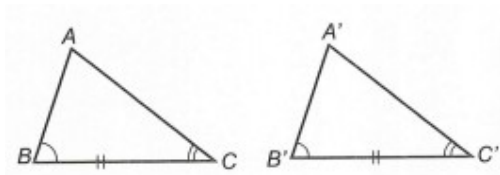
❖ Kỹ năng

- + Vẽ thành thạo một tam giác khi biết một cạnh và hai góc kề.
- + Phát hiện và chứng minh được hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh – góc.
- + Biết vận dụng một cách linh hoạt giữa các trường hợp bằng nhau của hai tam giác để chứng minh hai tam giác bằng nhau, hai đoạn thẳng (góc) bằng nhau.
- + Biết trình bày và lập luận chặt chẽ trong bài toán chứng minh hai tam giác bằng nhau, hai góc (đoạn thẳng) bằng nhau.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.



Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

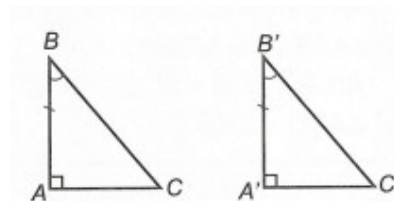
$$BC = B'C'$$

$$\hat{C} = \hat{C}'$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (g.c.g)

Hệ quả

Hệ quả 1: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



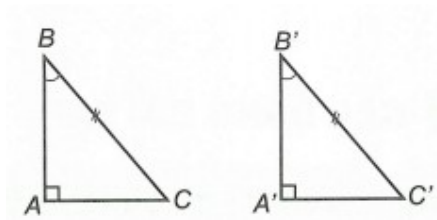
Xét $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$) và $\triangle A'B'C'$ ($\hat{A}' = 90^\circ$) có

$$AB = A'B'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề).

Hệ quả 2: Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



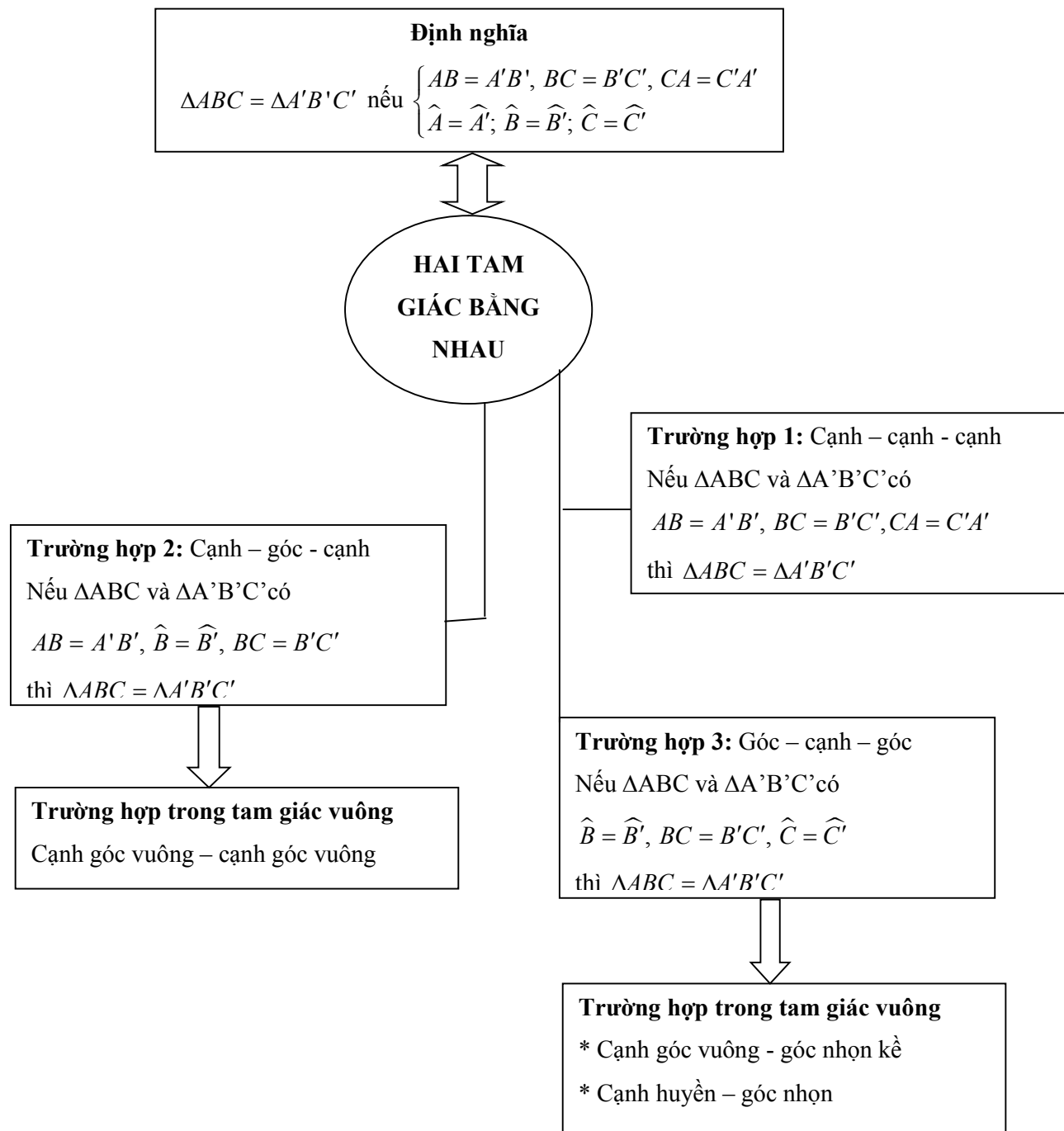
Xét $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$) và $\triangle A'B'C'$ ($\hat{A}' = 90^\circ$) có

$$BC = B'C'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (cạnh huyền – góc nhọn)

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

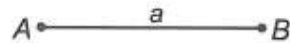
Dạng 1: Vẽ tam giác biết một cạnh và hai góc kề

Phương pháp giải

Vẽ $\triangle ABC$ biết $\widehat{A} = \alpha$, $AB = a$, $\widehat{B} = \beta$

Bước 1. Vẽ đoạn thẳng $AB = a$

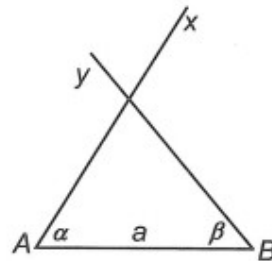
Bước 1.



Bước 2.

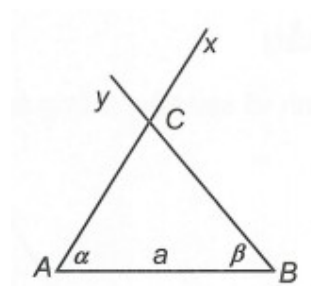
Bước 2. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ chứa AB vẽ

hai tia Ax và By thỏa mãn $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$



Bước 3.

Bước 3. Xác định vị trí của đỉnh C: Giao của hai tia vừa vẽ.



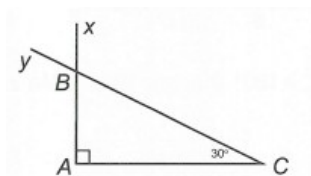
Ví dụ mẫu

Ví dụ. Vẽ $\triangle ABC$ biết $AC = 3\text{cm}$, $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$.

Hướng dẫn giải

- Vẽ đoạn thẳng $AC = 3\text{cm}$.
- Trên một nửa mặt phẳng bờ AC :
 - + Vẽ tia Ax vuông góc với AC tại A
 - + Vẽ tia Cy sao cho $\widehat{ACy} = 30^\circ$.
- Ax và Cy cắt nhau tại B

Ta được $\triangle ABC$ cần vẽ



Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Vẽ $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 70^\circ$, $BC = 4cm$, $\widehat{C} = 60^\circ$

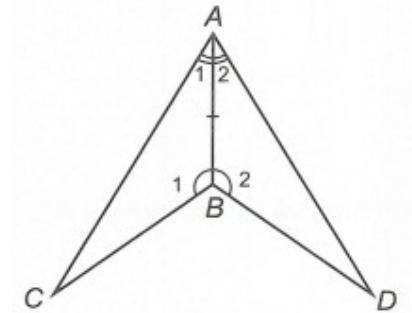
Câu 2: Vẽ $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 30^\circ$, $BC = 3cm$, $\widehat{C} = 60^\circ$

Dạng 2: Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc

Phương pháp giải

Ví dụ: Cho hình vẽ sau:

Chứng minh rằng $\triangle ABC = \triangle ABD$



Bước 1. Xét hai tam giác cần chứng minh

Bước 2. Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau: góc - cạnh - góc.

Chú ý: Hai góc kề cùng một cạnh.

Bước 3. Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ ta có

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (giả thiết)}$$

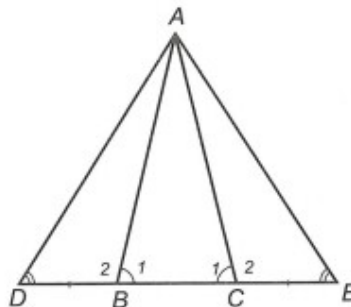
AB là cạnh chung

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (giả thiết).}$$

Do đó $\triangle ABC = \triangle ABD (g.c.g)$

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho hình vẽ sau đây, chứng minh rằng $\triangle ABD = \triangle ACE$



Hướng dẫn giải

Ta có $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$, $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Mà $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ nên $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$, ta có

$$\widehat{D} = \widehat{E} \text{ (giả thiết)}$$

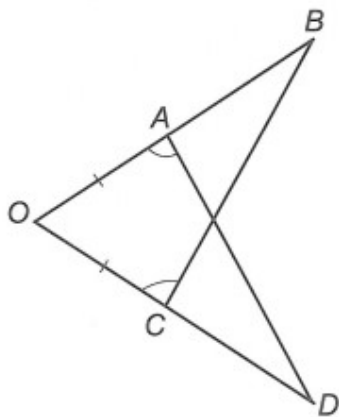
$BD = CE$ (giả thiết)

$\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$ (chứng minh trên)

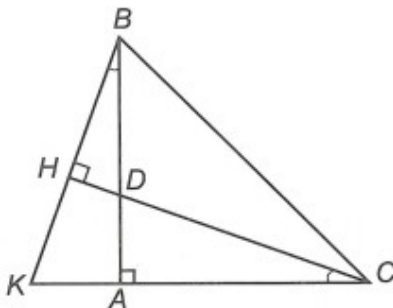
Do đó $\triangle ABD = \triangle ACE$ (g.c.g)

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Trong hình sau có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



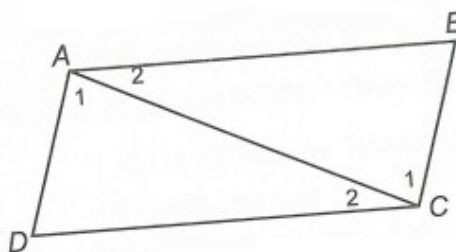
Câu 2: Cho hình vẽ sau biết $AB = AC$. Chứng minh $\triangle ABK = \triangle ACD$



Dạng 3. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải

Ví dụ: Cho hình vẽ sau với $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$



Chứng minh rằng $AB = CD$ và $AD = BC$

Hướng dẫn giải

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle CAB$ ta có

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc so le trong và $AD \parallel BC$)

Bước 1. Chọn hai tam giác có cạnh là hai đoạn thẳng cần chứng minh bằng nhau.

Bước 2. Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo AC là cạnh chung

một trong ba trường hợp bằng nhau.

$$\widehat{A_2} = \widehat{C_2} \text{ (hai góc so le trong và } AB \parallel DC \text{)}$$

Do đó $\Delta ACD = \Delta CAB$ (g.c.g)

Bước 3. Suy ra hai cạnh tương ứng bằng nhau

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \end{cases} \text{ (hai cặp cạnh tương ứng)}$$

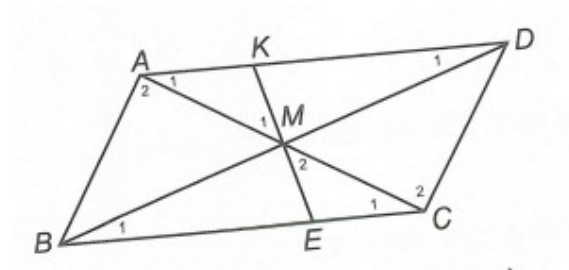
Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho cặp đoạn thẳng song song AD, BC bị chắn bởi hai đường thẳng song song AB, CD . Qua giao điểm M của AC và BD , kẻ đường thẳng bất kì cắt AD, BC theo thứ tự ở K, E . Chứng minh rằng:

a) $MA = MC$

b) $MK = ME$

Hướng dẫn giải



a) Vì $AD \parallel BC$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$; $\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$ (hai góc so le trong)

Vì $AB \parallel CD$ nên $\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$ (hai góc so le trong).

Xét ΔACD và ΔCAB , ta có

$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (chứng minh trên)}$$

AC là cạnh chung

$$\widehat{A_2} = \widehat{C_2} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Do đó } \Delta ACD = \Delta CAB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AD = BC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Xét ΔMAD và ΔMCB , ta có

$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$AD = BC \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{D_1} = \widehat{B_1} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Do đó } \Delta MAD = \Delta MCB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow MA = MC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Sơ đồ chứng minh.

$$\text{Vận dụng tính chất song song } AD \parallel BC, AB \parallel CD \Rightarrow \text{Chứng minh } \Delta ACD = \Delta CAB \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow \text{Chứng minh } AD = BC \Rightarrow \text{Chứng minh } \Delta MAD = \Delta MCB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow \text{Chứng minh } MA = MC$$

b) Xét $\triangle MAK$ và $\triangle MCE$, ta có

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$MA = MC \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle MAK = \triangle MCE$ (g.c.g) $\Rightarrow MK = ME$ (hai cạnh tương ứng)

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$ ($\widehat{A} < 90^\circ$). Kẻ BD vuông góc với AC ($D \in AC$). Kẻ CE vuông góc với AB ($E \in AB$). Chứng minh rằng: $BD = CE$

Câu 2: Cho $\triangle ABC$, điểm M thuộc cạnh BC . Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt AC ở D . Đường thẳng đi qua M và song song với AC cắt AB ở E . Chứng minh rằng $AD = ME$

Dạng 4: Sử dụng nhiều trường hợp bằng nhau của tam giác

Phương pháp giải

Sử dụng nhiều trường hợp bằng nhau của hai tam giác đã học:

+) Cạnh - cạnh - cạnh.

+) Cạnh - góc - cạnh.

+) Góc - cạnh - góc.

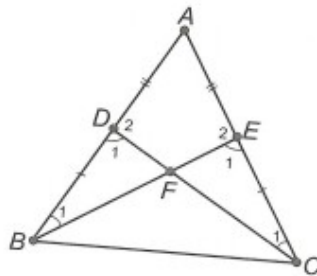
Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm D, E sao cho $AD = AE$. Chứng minh rằng

a) $BE = DC$

b) Gọi F là giao điểm của EB và DC . Chứng minh $FD = FE$

Hướng dẫn giải



a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle AEB$, ta có

$$AD = AE \text{ (giả thiết)}$$

$\widehat{A}$ là góc chung

$$AB = AC \text{ (giả thiết)}$$

Do đó $\triangle ADC = \triangle AEB$ (c.g.c)

$\Rightarrow DC = EB$ (hai cạnh tương ứng)

b) Theo câu a ta có $\triangle ADC = \triangle AEB \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}; \widehat{E_2} = \widehat{D_2}$ (hai góc tương ứng).

Vì $\widehat{E_2} = \widehat{D_2}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{D_1}$ (hai góc kề bù với hai góc bằng nhau)

Lại có $AB = AC$ và $AD = AE \Rightarrow AB - AD = AC - AE \Rightarrow DB = CE$

Xét $\triangle DFB$ và $\triangle EFC$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{C_1} \\ BD = CE \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{D_1} = \widehat{E_1} \end{cases}$$

Do đó $\triangle DFB = \triangle EFC$ (g.c.g) $\Rightarrow DF = EF$ (hai cạnh tương ứng).

Sơ đồ chứng minh câu b

Sử dụng kết quả câu a

$\Rightarrow$ Chứng minh $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}; BD = CE; \widehat{D_1} = \widehat{E_1}$

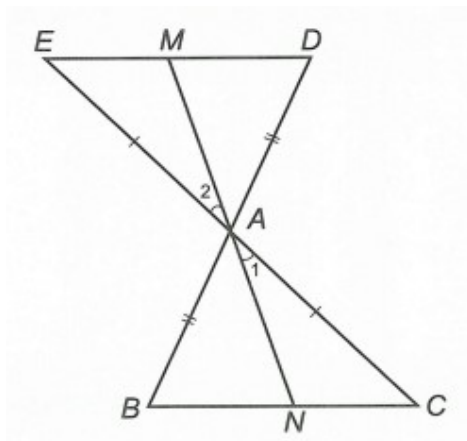
$\Rightarrow$ Chứng minh $\triangle DFB = \triangle EFC$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ Chứng minh $DF = EF$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Một đường thẳng đi qua A cắt các cạnh DE và BC theo thứ tự ở M và N .

Chứng minh rằng $AM = AN$

Hướng dẫn giải



Xét $\triangle AED$ và $\triangle ACB$, ta có

$AE = AC$ (giả thiết)

$\widehat{EAD} = \widehat{CAB}$ (hai góc đối đỉnh)

$AD = AB$ (giả thiết)

Do đó $\triangle AED = \triangle ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{C}$ (hai góc tương ứng)

Xét $\triangle AME$ và $\triangle ANC$, ta có

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$AE = AC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{E} = \widehat{C} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Do đó } \triangle AME = \triangle ANC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = AN \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Sơ đồ chứng minh

$$\text{Chứng minh } \triangle AED = \triangle ACB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \text{Chứng minh } \widehat{E} = \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \text{Chứng minh } \triangle AME = \triangle ANC \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow \text{Chứng minh } AM = AN$$

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Gọi O là giao điểm của BC và DE . Chứng minh rằng

a) $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

b) $OD = OB$

c) OA là tia phân giác của $\widehat{COE}$

Câu 2: Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Trên các cạnh AB và AC lấy các điểm D và E sao cho $AD = AE$. Gọi K là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng

a) $BE = CD$

b) $\widehat{KBC} = \widehat{KCB}$

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D , tia phân giác của góc C cắt AB ở E . Các tia phân giác đó cắt nhau tại I . Chứng minh rằng $ID = IE$

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Vẽ tam giác biết một cạnh và hai góc kề

Câu 1:

- Vẽ đoạn thẳng $BC = 4cm$

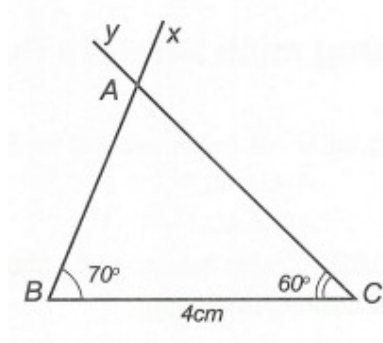
Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC :

- Vẽ tia Bx sao cho $\widehat{xBC} = 70^\circ$

- Vẽ tia Cy sao cho $\widehat{yCB} = 60^\circ$.

Bx và Cy cắt nhau tại A .

Ta được $\triangle ABC$ cần vẽ



Câu 2:

- Vẽ đoạn thẳng $BC = 3cm$

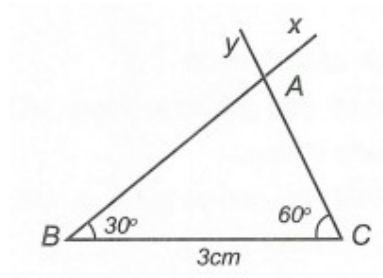
Trên nửa mặt phẳng bờ chứa đường thẳng BC :

- Vẽ góc $\widehat{CBx} = 30^\circ$

- Vẽ góc $\widehat{BCy} = 60^\circ$

Hai tia Bx và Cy cắt nhau tại A .

Ta được $\triangle ABC$ cần vẽ



Dạng 2. Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc

Câu 1:

$$\triangle OAD = \triangle OCB \text{ (g.c.g) vì } \begin{cases} \widehat{O} \text{ chung} \\ OA = OC \\ \widehat{OAD} = \widehat{OCB} \end{cases}$$

$\triangle OAD = \triangle OCB$ (g.c.g) $\Rightarrow OD = OB$ (hai cạnh tương ứng)

$\widehat{B} = \widehat{D}$ (hai góc tương ứng)

Mà $OC = OA \Rightarrow CD = AB$

Lại có $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{DCB}$ (hai góc kề bù với hai góc bằng nhau)

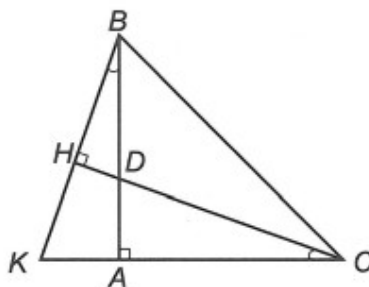
Gọi I là giao điểm của AD và BC

Xét $\triangle AIB$ và $\triangle CID$ có $\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{D} \\ AB = CD \\ \widehat{BAI} = \widehat{DCI} \end{cases}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\triangle AIB = \triangle CID$ (g.c.g)

Vậy $\triangle OAD = \triangle OCB$ (g.c.g) và $\triangle AIB = \triangle CID$ (g.c.g)

Câu 2:



Xét $\triangle ABK$ vuông tại A và $\triangle ACD$ vuông tại A có:

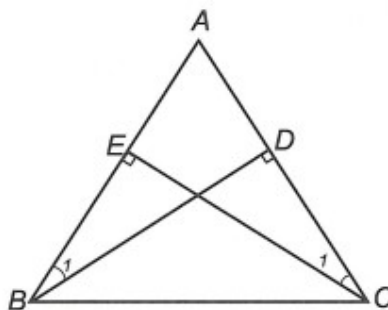
$$AB = AC$$

$$\widehat{ABK} = \widehat{ACD}$$

Suy ra $\triangle ABK = \triangle ACD$ (cạnh góc vuông - góc nhọn kề)

Dạng 3. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Câu 1:



Xét $\triangle ADB$ vuông tại D và $\triangle AEC$ vuông tại E, ta có

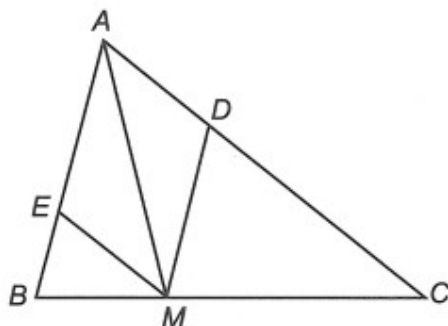
$\widehat{A}$ chung

$$AB = AC$$

Do đó $\triangle ADB = \triangle AEC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow DB = EC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Câu 2:



Xét $\triangle AMD$ và $\triangle MAE$, ta có

$$\widehat{AMD} = \widehat{MAE} \text{ (hai góc so le trong, } MD \parallel AB \text{)}$$

AM là cạnh chung.

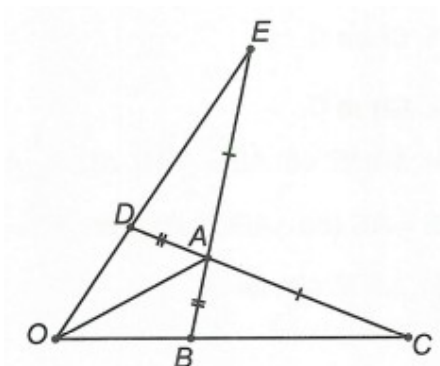
$$\widehat{EMA} = \widehat{DAM} \text{ (hai góc so le trong, } ME \parallel AC \text{)}$$

Do đó $\triangle AMD = \triangle MAE$ (g.c.g)

$$\Rightarrow ME = AD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Dạng 4. Sử dụng nhiều trường hợp bằng nhau của tam giác

Câu 1:



a) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$, ta có

$$AD = AB \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{DAE} = \widehat{BAC} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$AE = AC \text{ (giả thiết)}$$

Do đó $\triangle ADE = \triangle ABC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

b) Vì $\widehat{EDA} = \widehat{CBA}$ nên $\widehat{ADO} = \widehat{ABO}$ (tính chất hai góc kề bù).

Lại có $AE = AC$, $AD = AB$ nên $AE + AB = AC + AD$ hay $BE = DC$

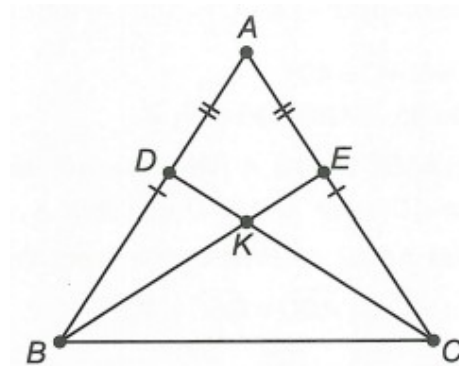
Xét $\triangle OBE$ và $\triangle ODC$, ta có $\widehat{OBE} = \widehat{ODC}$, $BE = DC$, $\widehat{E} = \widehat{C}$ (do $\triangle ADE = \triangle ABC$)

Do đó $\triangle OBE = \triangle ODC$ (g.c.g) $\Rightarrow OD = OB$ (hai cạnh tương ứng)

c) Xét $\triangle ODA$ và $\triangle OBA$, ta có $OD = OB$, $\widehat{ADO} = \widehat{ABO}$, $AD = AB$

Do đó $\triangle ODA = \triangle OBA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DOA} = \widehat{BOA}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow OA$ là tia phân giác của $\widehat{COE}$

Câu 2:



a) Xét $\triangle AEB$ và $\triangle ADC$, ta có

$AE = AD$, $\widehat{A}$ là góc chung, $AB = AC$

Do đó $\triangle AEB = \triangle ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$ (hai cạnh tương ứng).

b) Do $AB = AC$; $AD = AE$ nên $BD = EC$

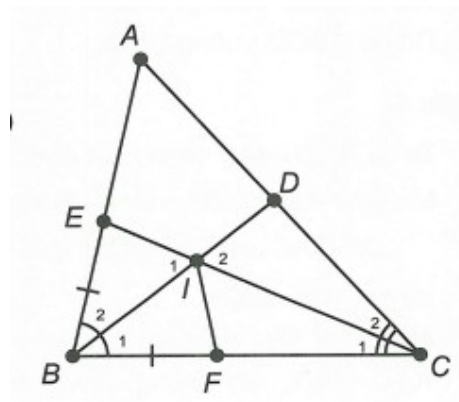
Xét $\triangle DBC$ và $\triangle ECB$, ta có

$DC = BE$ (chứng minh trên), BC là cạnh chung, $BD = EC$

Do đó $\triangle DBC = \triangle ECB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{ECB}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{KBC} = \widehat{KCB}$

Câu 3:



Xét $\triangle ABC$ ta có

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 60^\circ$ (do BD và CE là tia phân giác của góc B và góc C)

ΔBIC có $\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{B_1} + \widehat{C_1}) = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{I_2} = 60^\circ$ (hai góc đối đỉnh và cùng kề bù với $\widehat{BIC}$).

Trên BC lấy điểm F sao cho $BE = BF$

Khi đó dễ dàng chứng minh được $\Delta BEI = \Delta BFI$ (c.g.c)

$\Rightarrow IE = IF$ (hai cạnh tương ứng) (1)

$\widehat{I_1} = \widehat{BIF} = 60^\circ$ (hai góc tương ứng)

$\widehat{FIC} = \widehat{BIC} - \widehat{BIF} = 60^\circ$

Xét ΔIFC và ΔIDC ta có

$\widehat{FIC} = \widehat{DIC} = 60^\circ$ (chứng minh trên), IC là cạnh chung, $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (do CI là phân giác của $\widehat{ACB}$)

Do đó $\Delta IFC = \Delta IDC$ (c.c.c). Suy ra $ID = IF$ (hai cạnh tương ứng). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $IE = ID$