CHUYÊN ĐỀ : TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài 1: Cho : $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$, Tính giá trị của : $A=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}$

HD :

Từ : $4a^2+b^2=5ab\Leftrightarrow 4a^2-4ab-ab+b^2=0\Leftrightarrow (4a-b)(a-b)=0$

TH 1: $4a-b=0\Leftrightarrow 4a=b$ (mâu thẫn vì 2a > b)

TH 2: $a-b=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow A=\dfrac{a^2}{4a^2-a^2}=\dfrac{1}{3}$

Bài 2: Cho $3a^2+3b^2=10ab$ và $b>a>0$, Tính $A=\dfrac{a-b}{a+b}$

HD:

Từ: $3a^2+3b^2=10ab\Leftrightarrow 3a^2-9ab-ab+3b^2=0\Leftrightarrow (a-3b)(3a-b)=0$

TH 1: $a-3b=0\Leftrightarrow a=3b$(mâu thuẫn vì b > a > 0)

TH 2: $3a-b=0\Leftrightarrow 3a=b\Rightarrow A=\dfrac{a-3a}{a+3a}=\dfrac{-1}{2}$

Bài 3: Cho $9x^2+4y^2=20xy(2y<3x<0)$, Tính $A=\dfrac{3x-2y}{3x+2y}$

HD:

Từ: $9x^2+4y^2=20xy\Leftrightarrow (x-2y)(9x-2y)=0$

TH1: $x=2y\Rightarrow A=\dfrac{3x-x}{3x+x}=\dfrac{1}{2}$

TH2: $9x=2y$ (Mâu thuẫn vì 2y < 3x < 0)

Bài 4: Cho $x^2-2y^2=xy,(y\neq 0,x+y\neq 0)$,Tính $A=\dfrac{x-y}{x+y}$

HD:

Từ $x^2-2y^2=xy\Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0\Leftrightarrow (x-2y)(x+y)=0$

TH1: $x-2y=0\Leftrightarrow x=2y\Rightarrow A=\dfrac{2y-y}{2y+y}=\dfrac{1}{3}$

TH2: $x+y=0$(mâu thuẫn vì x + y # 0)

Bài 5: Cho $x>y>0$ và $2x^2+2y^2=5xy$, Tính $A=\dfrac{x+y}{x-y}$

HD:

Từ: $2x^2+2y^2=5xy\Leftrightarrow 2x^2-5xy+2y^2=0\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y)=0$

TH1: $x=2y\Rightarrow A=\dfrac{2y+y}{2y-y}=3$

TH2: $2x=y$ (Mâu thuẫn vì: x > y > 0)

Bài 6: Cho $3x-y=3z$ và $2x+y=7z$, Tính $A=\dfrac{x^2-2xy}{x^2+y^2}$, $x,y\neq 0$

HD:

Từ gt ta có: $\begin{cases}3x-y=3z\\2x+y=7z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2z\\y=3z\end{cases}\Rightarrow A=\dfrac{4z^2-12z^2}{4z^2+9z^2}=\dfrac{-8}{13}$

Bài 7: Cho $xy=-1$, Tính $P=\frac{1}{y^2-xy}+\frac{1}{x^2-xy}$

HD:

Ta có: $P=\frac{1}{y(y-x)}+\frac{1}{x(x-y)}=\frac{-x+y}{xy(x-y)}=\frac{-(x-y)}{-1(x-y)}=1$

Bài 8: Cho $3y-x=6$, Tính giá trị của $A=\frac{x}{y-2}+\frac{2x-3y}{x-6}$

HD:

Ta có: $3y-x=6 \Rightarrow x=3y-6 \Rightarrow A=\frac{3y-6}{y-2}+\frac{2(3y-6)-3y}{3y-6-6}=3+1=12$

Bài 9: Tính biểu thức :

a, $A=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$ với x.y.z =1 và các mẫu khác 0

b, $P=\frac{x}{-xy+x+1}-\frac{y}{yz-y+1}+\frac{z}{xz+z-1}$ với x.y.z =1 và các mẫu khác 0

Bài 10: Cho x, y, z khác 0 và x- y- z =0, Tính giá trị của: $B=\left(1-\frac{z}{x}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)$

Bài 11:Tình giá trị của biểu thức: $A=\frac{a+b}{a-b}$ với b> a> 0 và $2a^2+2b^2=5ab$

Bài 12: Cho $y>x>0, \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{10}{3}$, tính giá trị của biểu thức: $M=\frac{x-y}{x+y}$

Bài 13: Cho biểu thức: $P=\frac{2a-1}{3a-1}+\frac{5-a}{3a+1}, \left(a\neq\pm\frac{1}{3}\right)$, Tính giá trị của P biết: $10a^2+5a=3$

Bài 14: Cho abc=2015, Tính $A=\frac{2015a}{ab+2015a+2015}+\frac{b}{bc+b+2015}+\frac{c}{ac+c+1}$

HD :

$$A=\frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc}+\frac{b}{bc+b+abc}+\frac{c}{ac+c+1}$$
$$=\frac{a^2bc}{ab(1+ac+c)}+\frac{b}{b(c+1+ac)}+\frac{c}{ac+c+1}=\frac{ac+c+1}{ac+c+1}=1$$

Bài 15: Cho abc=2, Tính $B=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ac+2c+2}$

HD :

$$B=\frac{a}{ab+a+abc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{abc^2}{ac+abc^2+abc}=\frac{a}{a(b+1+bc)}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{abc^2}{ac(1+bc+b)}=1$$

Bài 16: Cho abc=1, Tính $A=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}$

HD :

$$A=\frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc}+\frac{b}{bc+b+abc}+\frac{c}{ac+c+1}=\frac{a^2bc}{ab(1+ac+c)}+\frac{b}{b(c+1+ac)}+\frac{c}{ac+c+1}=1$$

Bài 17: Cho abc= - 2012, Tính $B=\frac{a}{ab+a-2012}+\frac{b}{bc+b+1}-\frac{2012c}{ac-2012c-2012}$

HD :

$$B=\frac{a}{ab+a+abc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{abc^2}{ac+abc^2+abc}=\frac{a}{a\left(b+1+bc\right)}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{abc^2}{ac\left(1+bc+b\right)}=1$$

Bài 18: Chứng minh rằng nếu xyz=1 thì $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$

HD :

$$VT=\frac{xyz}{xyz+x^2yz+xy}+\frac{xyz}{xyz+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{xyz}{xy\left(z+xz+1\right)}+\frac{xyz}{y\left(xz+1+z\right)}+\frac{1}{1+z+zx}=1=VP$$

Bài 19: Cho xyz=2010, CMR: $\frac{2010x}{xy+2010x+2010}+\frac{y}{yz+y+2010}+\frac{z}{xz+z+1}=1$

HD :

$$VT=\frac{x^2yz}{xy+x^2yz+xyz}+\frac{y}{yz+y+xyz}+\frac{z}{xz+z+1}=1$$

Bài 20 : Tính giá trị của biểu thức sau biết : $abc=2016$

$$P=\frac{2bc-2016}{3c-2bc+2016}-\frac{2b}{3-2b+ab}+\frac{4032-3ac}{3ac-4032+2016a}$$

Bài 21: Tính GTBT $P=\frac{x+2xy+1}{x+xy+xz+1}+\frac{y+2yz+1}{y+yz+yx+1}+\frac{z+2zx+1}{z+zx+zy+1}$ biết $xyz=1$

HD :

$$P=\frac{yz\left(x+2xy+1\right)}{yz\left(x+xy+xz+1\right)}+\frac{xz\left(y+2yz+1\right)}{xz\left(y+yz+xy+1\right)}+\frac{xy\left(z+2zx+1\right)}{xy\left(z+zx+xy+1\right)}$$

$$=\frac{\left(1+y\right)+y\left(1+z\right)}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}+\frac{1+z+z\left(1+x\right)}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)}+\frac{1+x+x\left(1+y\right)}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x}+\frac{z}{1+z}+\frac{1}{1+y}+\frac{x}{1+x}$$

$$=\frac{y+1}{y+1}+\frac{1+z}{1+z}+\frac{1+x}{x+1}=3$$

Bài 22: Cho $\frac{a}{b}=\frac{10}{3}$, Tính $A=\frac{16a^2-40ab}{8a^2-24ab}$

HD :

$$\frac{a}{b}=\frac{10}{3}=>a=\frac{10}{3}b=>A=\frac{16.\frac{100}{9}b^2-40.\frac{10}{3}b^2}{8.\frac{100}{9}.b^2-24.\frac{10}{3}.b^2}=\frac{\frac{50}{9}}{\frac{10}{9}}=5$$

Bài 23: Cho a,b,c khác nhau đôi 1 và $a+b+c=0$, CMR: $a^3+b^3+c^3=3abc$

HD :

Ta có : $a+b=-c\Leftrightarrow\left(a+b\right)^3=-c^3\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)=-c^3\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Bài 24: Cho a,b,c khác nhau đôi 1 và $a^3+b^3+c^3=3abc$, CMR: $a+b+c=0$

HD :

Ta có : $a^3+b^3+c^3=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)+3abc$

Vì $a^3+b^3+c^3=3abc=>\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0$

Mà $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2=0$ (Mâu thuẫn vì $a\neq b\neq c$)

Nên $a+b+c=0$

Bài 25: Cho $a^3+b^3+c^3=3abc,(a,b,c\neq 0)$, Tính $P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

HD :

Ta có : $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$, Mà $a^3+b^3+c^3=3abc$ Nên

TH1 : $a+b+c=0\Rightarrow P=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{a}=\frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a}=-1$

TH2 : $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\Rightarrow a=b=c\Rightarrow P=(1+1)(1+1)(1+1)=8$

Bài 26: Cho a,b,c khác nhau đôi 1 và $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$, Tính $B=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

HD :

Từ gt $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$

TH1 : Nếu $a+b+c=0\Rightarrow B=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{a}=\frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a}=-1$

TH2 : nếu $a+b+c\neq 0\Rightarrow gt=2\Rightarrow B=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{a}=\frac{2c}{b}.\frac{2a}{c}.\frac{2b}{a}=8$

Bài 27: Cho $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=3a^2b^2c^2$, Tính $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

HD :

Đặt $\begin{cases}ab=x\\bc=y\\ac=z\end{cases}\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow A=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a}=\frac{y+z}{bc}.\frac{x+z}{ac}.\frac{x+y}{ab}$

$=\frac{-ab}{bc}.\frac{-bc}{ac}.\frac{-ac}{ab}=-1$ Hoặc : $x=y=z\Rightarrow a=b=c\Rightarrow A=8$

Bài 28: Cho a,b,c là các số thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}$. Tính $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

HD :

Từ gt=> $\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b+c}{a+b+c}$

TH1 : $a+b+c=0\Rightarrow A=\frac{a+b}{a}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{a}=-1$

TH2 : $a+b+c\neq 0\Rightarrow gt=1\Rightarrow a+b=2c,b+c=2a,c+a=2b\Rightarrow A=8$

Bài 29: Cho x,y là hai số thỏa mãn: $\begin{cases}ax+by=c\\bx+ay=a\\cx+ay=b\end{cases}$, CMR : $a^3+b^3+c^3=3abc$

HD :

Cộng theo vế của gt=> $(a+b+c)x+(a+b+c)y=a+b+c\Rightarrow(a+b+c)(x+y-1)=0$

TH1: $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

TH2: $x+y=1\Rightarrow a=b=c>a^3+b^3+c^3=3abc$

Bài 30: Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$, Tính giá trị $N=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

HD:

Từ gt $\Rightarrow a=b=c \Rightarrow N=\dfrac{3a^2}{9a^2}=\dfrac{1}{3}$

Bài 31: Cho $x^3+y^3+z^3=3xyz$, Rút gọn $A=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

HD:

Từ gt$\Rightarrow TH1: x+y+z=0 \Rightarrow A=\dfrac{xyz}{-xyz}=-1\ TH2: x=y=z \Rightarrow A=\dfrac{x^3}{2x.2x.2x}=\dfrac{1}{8}$

Bài 32: Rút gọn : $A=(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$

HD:

Đặt: $a+b-2c=x, b+c-2a=y, c+a-2b=z$

$A=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(a+b-2c+b+c-2a+c+a-2b)(x^2+y^2+z^2+...)=0$

Bài 33: Cho a,b,c khác nhau đôi 1 và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, Rút gọn: $A=\dfrac{1}{a^2+2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ac}+\dfrac{1}{c^2+2ab}$

HD:

Ta có: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0 \Leftrightarrow ab+bc+ca=0 \Rightarrow a^2+2bc=a^2+bc-ab-ca=(a-b)(a-c)$

Tương tự: $b^2+2ac=(b-a)(b-c), c^2+2ba=(c-a)(c-b)$

Khi đó: $A=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{c-b+a-c+b-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$

Bài 34: Cho a, b, c đôi 1 khác nhau và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, Tính $P=\dfrac{1}{a^2-2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ac}+\dfrac{1}{c^2+2ab}$

Bài 35: Cho a,b,c khác nhau đôi 1 và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, Rút gọn: $B=\dfrac{bc}{a^2+2bc}+\dfrac{ac}{b^2+2ac}+\dfrac{ab}{c^2+2ab}$

HD:

Theo bài 26 =>

$B=\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ac}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{ab(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Phân tích tử => B

Bài 36: Cho a,b,c khác nhau đôi 1 và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$,Rút gọn: $C=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

HD:

Theo bài 26

$\Rightarrow C=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Phân tích tử =>C

Bài 37: Cho a,b,c$\neq 0$, và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, Tính $A=\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{ac}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}$

HD:

Từ gt = $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{3}{abc}$

Khi đó: $A=\dfrac{abc}{a^3}+\dfrac{abc}{b^3}+\dfrac{abc}{c^3}=abc\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)=abc.\dfrac{3}{abc}=3$

Bài 38: Cho x,y,z đôi 1 khác nhau và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$, Tính $A=\dfrac{yz}{x^2+2yz}+\dfrac{xz}{y^2+2xz}+\dfrac{xy}{z^2+2xy}$

Bài 39: Cho a+b+c=0 và a,b,c $\neq 0$, Rút gọn $A=\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ac}{c^2+a^2-b^2}$

HD:

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow a^2+b^2+2ab=c^2 \Rightarrow a^2+b^2-c^2=-2ab$

Tương tự: $b^2+c^2-a^2=-2bc, c^2+a^2-b^2=-2ac$, Khi đó:

$A=\frac{ab}{-2ab}+\frac{bc}{-2bc}+\frac{ac}{-2ac}=\frac{-3}{2}$

Bài 40: Cho a+b+c=0, a,b,c $\neq 0$, Rút gọn $B=\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-a^2-c^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$

HD:

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a \Rightarrow b^2+c^2+2bc=a^2 \Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc$,

Tương tự: $b^2-a^2-c^2=2ac, c^2-a^2-b^2=2ab$, Khi đó:

$$B=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ac}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{1}{2abc}\left(a^3+b^3+c^3\right)=\frac{3abc}{2abc}=\frac{3}{2}$$

Bài 41: Cho a+b+c=0, a,b,c $\neq 0$, Rút gọn $A=\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$

HD:

Từ: $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a \Rightarrow b^2+c^2+2bc=a^2 \Rightarrow b^2+c^2-a^2=-2bc$

Tương tự: $c^2+a^2-b^2=-2ac, a^2+b^2-c^2=-2ab$, Khi đó:

$A=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ac}+\frac{1}{-2ab}=\frac{-1}{2}\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=0$

Bài 42: Cho a+b+c=0, a,b,c $\neq 0$, Rút gọn $A=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$

HD:

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$, khi đó: $A=\frac{a^3}{abc}+\frac{b^3}{abc}+\frac{c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$

Bài 43: Cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0, \left(x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0\right)$, Tính giá trị của biểu thức: $\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}$

HD:

Với $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$, Áp dụng kết quả câu a ta có:

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz} \Rightarrow \frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=\frac{xyz}{x^3}+\frac{xyz}{y^3}+\frac{xyz}{z^3}=xyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)=xyz.\frac{3}{xyz}=3$$

Bài 44: Cho a+b+c=1, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, CMR: $a^2+b^2+c^2=1$

HD:

Từ $a+b+c=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=1, (1)$

Mà: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc}=0 \Leftrightarrow ab+bc+ca=0$, thay vào (1)=> ĐPCM

Bài 45: Cho x,y,z $\neq 0$, Thỏa mãn: $x+y+z=xyz$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$, Tính $A=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$

HD:

Từ: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)=3$

Nên $A+2=3 \Rightarrow A=1$

Bài 46: Cho a,b,c $\neq 0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$, và $a+b+c=abc$, CMR: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$

HD:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=4$$

Bài 47: Cho $a+b+c=0, x+y+z=0$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, CMR: $a.x^2+b.y^2+c.z^2=0$

Bài 48: Cho a,b,c là ba số thực khác 0, thỏa mãn : $a+b+c=3$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, Tính $A=a^2+b^2+c^2$

HD:

Từ: $a+b+c=3 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=9$, (1)

Mà: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Leftrightarrow ab+bc+ca=0$ thay vào (1) $A+2.0=9 \Rightarrow A=9$

Bài 49: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ và $a+b+c=abc$, Tính $A=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

HD:

Từ: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=4$

$\Leftrightarrow A+2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=4 \Leftrightarrow A+2=4 \Leftrightarrow A=2$

Bài 50: CMR: Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$ và a+b+c=abc Thì ta có: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=7$

Bài 51: Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, Tính $A=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

HD:

Từ: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)=1 \Leftrightarrow A+2\left(\frac{cxy+ayz+bzx}{abc}\right)=1$ (1)

Mà: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$ thay vào (1) ta được: $A+2.0=1 \Leftrightarrow A=1$

Bài 52: Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$, Tính $A=\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}$

HD:

Từ: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z}+2\left(\frac{ab}{xy}+\frac{bc}{yz}+\frac{ca}{zx}\right)=2 \Leftrightarrow A+2\left(\frac{abz+bcx+cay}{xyz}\right)=2$ (1)

Mà: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \Leftrightarrow bcx+acy+abz=0$ thay vào (1) ta được: $A+2.0=2 \Rightarrow A=2$

Bài 53: Cho 3 số hữu tỉ a,b,c thỏa mãn: $abc=1$ và $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}$, CMR trong ba số a,b,c phải có 1 số bằng bình phương số còn lại

HD:

Đặt: $x=\frac{a}{b^2}, y=\frac{b}{c^2}, z=\frac{c}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a}=\frac{1}{x}, \frac{c^2}{b}=\frac{1}{y}, \frac{a^2}{c}=\frac{1}{z} \Rightarrow xyz=1$ và

$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=xy+yz+zx$

Xét tích: $(x-1)(y-1)(z-1)=0 \Rightarrow x=1, y=1, z=1$. Với $x=1 \Rightarrow a=b^2$ (ĐPCM)

Bài 54: Cho $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\neq 0$, Rút gọn: $A=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(ax+by+cz\right)^2}$

HD:

Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k \Rightarrow x=ak, y=bk, z=ck$ thay vào A

Bài 55: Cho: $\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c}$, trong đó a,b,c thỏa mãn:

$2b+2c-a, 2c+2a-b, 2a+2b-c\neq 0$, CMR: $\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}$

HD:

Từ gt $=\frac{2(2z+2x-y)+2(2x+2y-z)-(2y+2z-x)}{2b+2c-a}=$

$\frac{2(2x+2y-z)+2(2y+2z-x)-(2z+2x-y)}{2c+2a-b}$

$=\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}$

Bài 56: Cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0, xyz\neq 0$, Tính $A=\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}$

Bài 57: Cho $a+b+c=0$, Tính $\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2}$

Bài 58: Tính : $A=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)^2+\left(ab+bc+ca\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2-\left(ab+bc+ca\right)}$

Bài 59: Cho $c^2+2ab-2ac-2bc=0$, Rút gọn biểu thức : $\frac{a^2+\left(a-c\right)^2}{b^2+\left(b-c\right)^2}$

Bài 60: Cho $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1,$ và $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, CMR: $xy+yz+zx=0$

HD:

Đặt: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k \Rightarrow xy+yz+zx=k^2\left(ab+bc+ca\right)$ (1)

Mà: $a+b+c=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=1 \Leftrightarrow ab+bc+ca=0$ thay vào (1) ta được:

$xy+yz+xz=0$

Bài 61: Cho a,b,c thỏa mãn: $a+b+c=0, ab+bc+ca=0$, Tính $A=\left(a-1\right)^{2015}+b^{2014}+\left(c+1\right)^{2013}$

HD:

Nhẩm thấy a=b=c=0 nên ta xét:

$a+b+c=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=0$

Do đó : a=b=c=0 thay vào $A=\left(-1\right)^{2015}+0^{2014}+1^{2013}=0$

Bài 62: Cho x,y,z là ba số thỏa mãn: xyz=1 và $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, Tính $P=\left(x^{19}-1\right)\left(y^5-1\right)\left(z^{1890}-1\right)$

HD:

Nhận thấy x=y=z=1, nên ta xét: $(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1=0$

Nên hoặc x=1 hoặc y=1 hoặc z=1

Nếu x=1=>P=0, Nếu y=1=>P=0, nếu z=1=>P=0

Bài 63: Cho xyz=1, $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, Tính $A=\left(x^{2015}-1\right)\left(y^{1006}-1\right)\left(z-1\right)+2016$

HD :

Nhẩm thấy x=y=z=1, ta có : $x+y+z=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=xy+yz+zx$

Xét tích : $\left(x-1\right)\left(y-1\right)\left(z-1\right)=xyz-\left(xy+yz+zx\right)+\left(x+y+z\right)-1=0$

Nên hoặc x=1 hoặc y=1 hoặc z=1

Nếu x=1 thì P=2016, Nếu y=1 thì P=2016, Nếu z=1 thì P=2016

Bài 64: Cho x,y,z là các số thỏa mãn : xyz=1, và $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$,

Tính : $A=\left(x^{15}-1\right)\left(y^{27}-1\right)\left(z^{2016}-1\right)$

HD :

Từ gt ta có : $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=xy+yz+zx$

Xét $\left(x-1\right)\left(y-1\right)\left(z-1\right)=xyz-\left(xy+yz+zx\right)+\left(x+y+z\right)-1=0$

Nên hoặc x=1 hoặc y=1 hoặc z=1 khi đó A=0

Bài 65: Cho $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6$, Tính $A=x^{2012}+y^{2013}+z^{2014}$

HD :

Từ gt=>$\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)+\left(y^2+\frac{1}{y^2}-2\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}-2\right)=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=0$

Vì x^{2012},y^{2014} luôn nhân giá trị bằng 1 khi x,y nhận giá trị 1 hoặc -1 nên ta có 2 TH :

TH1 : $y=1=>A=3$

TH2 : $y=-1=>A=1$

Bài 66: CMR nếu a,b,c là ba số thỏa mãn: a+b+c=2000 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2000}$, thì 1 trong ba số phải có 1 số bằng 2000

HD :

Từ gt ta có : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)=0\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c\left(a+b+c\right)}=0$

$\left(a+b\right)\left[c\left(a+b+c\right)+ab\right]=0\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=0$

TH1 : $a+b=0\Leftrightarrow c=2000$

TH2 : $b+c=0\Leftrightarrow a=2000$

TH3 : $c+a=0\Leftrightarrow b=2000$

Bài 67: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn : abc=1 và $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,

CMR có ít nhất 1 số a,b,c bằng 1

HD :

Từ gt ta có : $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+bc+ca$

Xét tích : $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)=abc-\left(ab+bc+ca\right)+\left(a+b+c\right)-1=0$ nên hoặc a=1 hoặc b=1 hoặc c=1

Bài 68: Cho các số thực dương thỏa mãn $a^{100}+b^{100}=a^{101}+b^{101}=a^{102}+b^{102}$, Tính $P=a^{2015}+b^{2015}$

HD :

Từ : $a^{100}=b^{100}=a^{101}+b^{101}\Leftrightarrow a^{100}(a-1)+b^{100}(b-1)=0$ (1)

và $a^{101}+b^{101}=a^{102}+b^{102}\Leftrightarrow a^{101}(a-1)+b^{101}(b-1)=0$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow a^{101}(a-1)+b^{101}(b-1)-a^{100}(a-1)-b^{100}(b-1)=0\Leftrightarrow a^{100}(a-1)^2+b^{100}(b-1)^2=0$

Do $a,b>0\Rightarrow\begin{cases}(a-1)^2=0\\(b-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ khi đó : $P=1^{2015}+1^{2015}=2$

Bài 69: Cho $\begin{cases}a^3+b^3=1\\a^2+b^2=1\end{cases}$, Tính $A=a^{2014}+b^{2014}$ (CL)

Bài 70: Cho $\begin{cases}x+y=a+b\\x^2+y^2=a^2+b^2\end{cases}$ CMR: $x^n+y^n=a^n+b^n$

HD:

Ta có: $x^2+y^2=a^2+b^2\Leftrightarrow(x-a)(x+a)+(y-b)(y+b)=0$ (1)

Mà $x-a=b-y$ thay vào (1) ta được: $(b-y)(x+a-b-y)=0$

TH1 : $b-y=0\Leftrightarrow b=y\Rightarrow x=a\Rightarrow x^n+y^2=a^n+b^2$

TH2 : $x+a-b-y=0\Leftrightarrow x-y=b-a\Rightarrow 2x=2b\Leftrightarrow x=b\Rightarrow y=a\Rightarrow x^n+y^n=a^n+b^n$

Bài 71: Cho x+y+z=0, Rút gọn: $A=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$

HD :

Ta có : $x+y+z=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$

Mẫu : $2x^2+2y^2+2z^2-2(xy+yz+zx)=2x^2+2y^2+2z^2+x^2+y^2+z^2=3(x^3+y^2+z^2)$

Khi đó : $A=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3(x^2+y^2+z^2)}=\dfrac{1}{3}$

Bài 72: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn : $x^3+y^3+z^3=3xyz$, Tính giá trị của biểu thức :

$T=\dfrac{x^{10}+y^{10}+z^{10}}{(x+y+z)^{10}}$

Bài 73: Cho $ax+by+cz=0, a+b+c=2016$, Tính giá trị của biểu thức :

$A=\dfrac{bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2}{ax^2+by^2+cz^2}$

Bài 74: Cho $a+b+c=1$ (a, b, c khác 1 và 2), CMR :

$\dfrac{c+ab}{a^2+b^2+abc-1}+\dfrac{a+bc}{b^2+c^2+abc-1}+\dfrac{b+ac}{a^2+c^2+abc-1}=\dfrac{bc+ac+ab+8}{(a-2)(b-2)(c-2)}$

Bài 75: Rút gọn : $A=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)}$

HD :

Ta có : Đặt : $a^2+b^2+c^2=x$ và $ab+bx+ca=y$ khi đó : $(a+b+c)^2=x+2y$, thay vào A ta có :

$$A=\frac{x(x+2y)+y^2}{x+2y-y}=\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}=x+y=a^2+b^2+c^2+ab+ab+ca$$

$$\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]$$

Bài 76: Cho a,b,c khác 0 thỏa mãn : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$, Tính giá trị của: $Q=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$

HD:

Nhận thấy $a+b+c=0$ không thỏa mãn : nên nhân vào gt với $a+b+c=0$ ta được :

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{b(c+a)}{c+a}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c(a+b)}{a+b}+\frac{c^2}{a+b}=a+b+c\Leftrightarrow$$

$$Q+a+b+c=a+b+c\Leftrightarrow Q=0$$

Bài 77: Cho a,b,c đôi một khác nhau và $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, Tính giá trị của biểu thức :

$$A=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}$$

HD:

Nhân $\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)$ vao gt ta được : $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=0$

$$\Leftrightarrow P+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}=0$$

$$\Leftrightarrow P+\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0\Leftrightarrow P=0$$

Bài 78: Cho a,b,c đôi 1 khác nhau, thỏa mãn : $ab+bc+ca=1$, Tính $A=\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$

HD :

Ta có : $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=b(a+c)+a(a+c)=(a+b)(a+c)$

Tương tự : $1+b^2=(b+a)(b+c)$, $1+c^2=(c+a)(c+b)$ khi đó : $A=1$

Bài 79: Cho a,b,c đôi 1 khác nhau , thỏa mãn: $ab+bc+ca=1$,

Tính $B=\frac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$

HD :

Ta có :

$$a^2+2bc-1=a^2+2bc-ab-bc-ca=a^2+bc-ab-ac=a(a-b)+c(b-a)=(a-b)(a-c)$$

Tương tự : $b^2+2ca-1=(b-a)(b-c)$, $c^2+2ab-1=(c-a)(c-b)$

Khi đó : $B=-1$

Bài 80: Cho a,b,c là ba số khác nhau, CMR :

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

HD :

Ta có : $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}$

Tương tự : $\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}$, $\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$

Khi đó : $VT=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=VP$

Bài 81: Cho a,b,c đôi 1 khác nhau, Tính giá trị : $A=\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}$

HD :

Đặt : $\frac{a}{b-c}=x,\frac{b}{c-a}=y,\frac{c}{a-b}=z$ khi đó :

$(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)\Leftrightarrow xy+yz+zx=-1$

Bài 82: Cho 3 số a,b,c đôi 1 khác nhau thỏa mãn : $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, CMR trong ba số a,b,c phải có 1 số âm, 1 số dương

HD :

Vì $a\neq b,b\neq c,c\neq a\Rightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\neq 0$ Mà : $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$

$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}\right]+\left(\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}\right)=0$

Nhận thấy Tổng B $\neq$ 0 => $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$,

Do đó a,b,c không cùng âm, cùng dương, Nên phải có 1 số âm 1 số dương

Bài 83: Cho a,b,c là các số hữu tỉ đôi 1 khác nhau, MCR : $A=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$ là bình phương của 1 số hữu tỉ

HD :

Ta có :

$\left(\frac{1}{(a-b)}+\frac{1}{(b-c)}+\frac{1}{(c-a)}\right)^2=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{2}{(a-b)(b-c)}+\frac{2}{(b-c)(c-a)}+\frac{2}{(c-a)(a-b)}$

$A+\frac{2(a-b)+2(b-c)+2(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=A+0=A$ Vậy A là bình phương của 1 số hữu tỉ :

Bài 84: Cho a+b+c=0, $P=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}$ và $Q=\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}$, CMR : P.Q=9

HD :

Xét $P.\frac{c}{a-b}=1+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=1+\frac{c}{a-b}.\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=1+\frac{c}{a-b}.\frac{(a-b)(c-a-b)}{ab}$

$1+\frac{2c^2}{ab}=1+\frac{2c^3}{abc}$, Tương tự : $P.\frac{a}{b-c}=1+\frac{2a^3}{abc}$ và $P.\frac{b}{c-a}=1+\frac{2b^3}{abc}$ khi đó :

$P.Q=3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=9$

Bài 85: Cho a,b,c đôi 1 khác nhau, Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-b)(c-a)}$$

HD :

$$A=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$$

Bài 86: Cho 3 số a,b,c thỏa mãn: $b\neq c, a+b\neq c$ và $c^2=2(ac+bc-ab)$,

CMR: $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$

HD :

Ta có : $a^2+(a-c)^2=a^2+c^2-c^2+(a-c)^2=a^2+c^2-2(ac-bc-ab)+(a-c)^2$

$(a^2+c^2-2ac)+2b(a-c)+(a-c)^2=(a-c)^2+2b(a-c)+(a-c)^2=2(a-c)(a-c+b)$

Tương tự ta có : $b^2+(b-c)^2=2(b-c)(b-c+a)$

Khi đó : $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$

Bài 87: Cho x,y,z đôi 1 khác nhau, CMR:

$$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z-x}{(y-z)(y-x)}+\frac{x-y}{(z-x)(z-y)}=\frac{2}{x-y}+\frac{2}{y-z}+\frac{2}{z-x}$$

HD:

Ta có: $\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}=\frac{-(x-y)+(x-z)}{(x-y)(x-z)}=\frac{-1}{x-z}+\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z-x}$

Tương tự ta có: $\frac{z-x}{(y-z)(y-x)}=\frac{1}{y-z}+\frac{1}{x-y}$ và $\frac{x-y}{(z-x)(z-y)}=\frac{1}{z-x}+\frac{1}{y-z}$

Cộng theo vế ta được:

Bài 88: Cho a+b+c=0, CMR:

a, $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$ b, $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{(a^3+b^3+c^3)}{3}.\frac{(a^2+b^2+c^2)}{2}$

HD:

Ta có: $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc\Rightarrow 3abc(a^2+b^2+c^2)=(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow 3abc(a^2+b^2+c^2)=a^5+b^5+c^5+a^3(b^2+c^2)+b^3(c^2+a^2)+c^3(a^2+b^2)$

Mà: $b+c=-a\Rightarrow b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=a^2-2bc$,Tương tự ta có: $c^2+a^2=b^2-2ac$

$a^2+b^2=c^2-2ab$ Nên ta có :

$(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=a^5+b^5+c^5+a^3(a^2-2bc)+b^3(b^2-2ac)+c^3(c^2-2ab)$

$=2(a^5+b^5+c^5)-2abc(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow 2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$

Bài 89: Cho a+b+c=0, CMR: $\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-a^2-c^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}=\frac{3}{2}$

HD:

Từ $a+b+c=0\Rightarrow b+c=-a\Rightarrow b^2+c^2+2bc=a^2\Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc$,

Tương tự: $b^2-a^2-c^2=2ac, c^2-a^2-b^2=2ab$, Khi đó:

$$\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ac}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{1}{2abc}(a^3+b^3+c^3)=\frac{3abc}{2abc}=\frac{3}{2}$$

Bài 90: CMR: $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}+\frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}+\frac{(c+a)^2}{(c-a)^2}\geq 2$

HD :

Đăt : $\frac{a+b}{a-b}=x,\frac{b+c}{b-c}=y,\frac{c+a}{c-a}=z \Rightarrow M=x^2+y^2+z^2$, Ta cần CM :

$(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1) \Rightarrow xy+yz+zx=-1$ (1)

Từ : $(x+y+z)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq -2(xy+yz+zx)=-2(-1)=2\Rightarrow M\geq 2$

Dấu bằng khi $x+y+z=0\Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}=0$

Bài 91: Cho a+b+c=0 và $a^2+b^2+c^2=14$, Tính $A=a^4+b^4+c^4$

HD :

Ta có :$14^2=(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ (1). Ta lại có :

$a+b+c=0\Rightarrow (a+b+c)^2=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca=-7\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=49$, Thay lên (1)

$14^2=A+2.49$

Bài 92: Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=0,a^2+b^2+c^2=2010$, Tính giá trị của biểu thức:

$A=a^4+b^4+c^4$

HD:

Ta có: $ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}=\frac{0-2010}{2}=-1005$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=(-1005)^2-2abc.0=1005^2$

$\Rightarrow A=a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=2010^2-1005^2=2.1005^2$

Bài 93: Cho x>0 thỏa mãn: $x^2+\frac{1}{x^2}=7$, CMR: $x^5+\frac{1}{x^5}$ là 1 số nguyên

HD :

Ta có : $x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

Ta tính : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=9\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=18$

Và $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=47$

Bài 94: Cho x$\neq$0 và $x+\frac{1}{x}=a$, Tính theo a các giá trị của:

a, $x^3+\frac{1}{x^3}$ b, $x^6+\frac{1}{x^6}$ c, $x^7+\frac{1}{x^7}$

HD :

a, $x+\frac{1}{x}=a\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$ Nên $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=a(a^2-2)-a$

b, $x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2$

c, $x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Bài 95: Cho x$\neq 0$ và $x^2+\frac{1}{x^2}=a$, Tính theo a các giá trị của:

a, $x^3+\frac{1}{x^3}$ b, $x^6+\frac{1}{x^6}$ c, $x^7+\frac{1}{x^7}$

HD :

Ta có : $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\sqrt{a+2}$. Làm giống bài 68

Bài 96: Cho biết a, b là hai số thực thỏa mãn : $a+b=5$ và $a^2+b^2=5$, Tính a^3+b^3

Bài 97: Cho $x^2+\frac{1}{x^2}=2$, và x > 0. Tính $A=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$

HD :

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=2$ và $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=2.2-2=2$

và $x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2=2$ thay vào A

Bài 98: Cho 3 số x,y,z thỏa mãn: x+y+z=0 và $x^2+y^2+z^2=a^2$, Tính $A=x^4+y^4+z^4$ theo a

HD :

Ta có : $a^4=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=A+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$, Mặt khác:

$\left(x+y+z\right)^2=a^2+2\left(xy+yz+zx\right)=0$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=\frac{-a^2}{2} \Leftrightarrow \left(xy+yz+zx\right)^2=\frac{a^4}{4} \Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz\left(x+y+z\right)=\frac{a^4}{4}$

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\frac{a^4}{4}$ Thay lên trên ta đươc : $a^4=A+2.\frac{a^4}{4}=A+\frac{a^4}{2}$

Bài 99: Cho ba số a,b,c thỏa mãn a+b+c=0 và $a^2+b^2+c^2=2010,$ Tính giá trị của biểu thức:

$A=a^4+b^4+c^4$

HD:

Ta có: $ab+bc+ca=\frac{\left(a+b+c\right)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}=\frac{0-2010}{2}=-1005$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\left(ab+bc+ca\right)^2-2abc\left(a+b+c\right)=\left(-1005\right)^2-2abc.0=1005^2$

$\Rightarrow A=a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=2010^2-1005^2=2020050$

Bài 100: Cho a+b+c=0, CMR: $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$ Bài 10: CMR: Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$ và a+b+c=abc . Thì ta có: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=7$

HD :

Ta có : $\left(a+b+c\right)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2\left(ab+bc+ca\right)$

$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=4\left(ab+bc+ca\right)^2$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)\right)$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4=2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+c^4\right)=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$\Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+c^4\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \Rightarrow$ ĐPCM

Bài 101: Cho 2 số x,y thỏa mãn: $xy+x+y=-1$, và $x^2y+xy^2=-12$, Tính $A=x^3+y^3$

HD :

Từ gt ta có : $\begin{cases} xy+(x+y)=-1 \\ xy(x+y)=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ ab=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$

Khi đó $A=(x+y)^3-3xy(x+y)$

Bài 102: Cho x+y=9, xy=14, Tính

a, x^2+y^2 b, x^3+y^3 c, $x-y$ d, x^5+y^5

HD :

a, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=81-28$

b, $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=9^3-3.14.9=351$

c, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

d, $x^5+y^5=\left(x^3+y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-x^2y^2(x+y)$

Bài 103: Cho x-y=2, Tính : $A=2\left(x^3-y^3\right)-3(x+y)^2$

HD :

Ta có : $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$, Mà :

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy \Rightarrow A=2.8+12xy-3.(4+4xy)$

Bài 104: Cho $a+b=1$, Tính giá trị của biểu thức: $C=2\left(a^3+b^3\right)-3\left(a^2+b^2\right)$

HD:

Ta có: $C=2\left(a^3+b^3\right)-3\left(a^2+b^2\right)=2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-3\left(a^2+b^2\right)$

$=2\left(a^2-ab+b^2\right)-3\left(a^2+b^2\right)$

$=2\left(a^2+b^2\right)-2ab-3\left(a^2+b^2\right)=-\left(a^2+b^2-2ab\right)=-(a+b)^2=-1$

Bài 105: Cho x>y>0, x-y=7, xy=60, Tính

a, x^2+y^2 b, x^3+y^3 c, $x-y$,

HD :

$a, x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

b, $x^3+y^3=\left(x^2+y^2\right)(x+y)-xy(x+y)$, mà : $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=49+4.60$

Bài 106: Cho a+b=1, tính $A=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2(a+b)$

HD :

Ta có : $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, và $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

Bài 107: Cho $x^2-y^2=1$, Tính $A=2\left(x^6-y^6\right)-3\left(x^4+y^4\right)$

HD :

$x^6-y^6=\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4\right)+x^2y^2\left(x^2+y^2\right)$, mà : $x^4+y^4=\left(x^2-y^2\right)^2+2x^2y^2$, thay vào ta được

Bài 108: Cho a+b=1, Tính giá trị của biểu thức $C=2\left(a^3+b^3\right)-3\left(a^2+b^2\right)$

HD :

Ta có: $C=2\left(a^3+b^3\right)-3\left(a^2+b^2\right)=2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-3\left(a^2+b^2\right)$

$=2\left(a^2-ab+b^2\right)-3\left(a^2+b^2\right)=-\left(a^2+b^2\right)-2ab=-(a+b)^2=-1$

Bài 109: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=2012 \end{cases}$, Tính $A=a^4+b^4+c^4$

HD:

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2=\frac{2012^2}{4}$

$\Rightarrow A=a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=\frac{2012^2}{2}$

Bài 110: Cho $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ và $x,y,z\neq 0$, CMR: $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz}$

HD :

Từ : $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2\Rightarrow xy+yz+zx=0\Rightarrow\frac{xy+yz+zx}{xyz}=0\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

Khi đó : $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz}$

Bài 111: CMR: Nếu $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$ thì a=b=c

HD:

Từ: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

Bài 112: Cho $a^2+b^2+c^2=m$, Tính theo m giá trị của: $A=(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2$

HD:

Phân tích theo hằng đẳng thức:

Bài 113: Cho $a^2-b^2=4c^2$, CMR: $(5a-3b+8c)(5a-3b-8c)=(3a-5b)^2$

HD:

$VT=(5a-3b)^2-64c^2=25a^2-30ab+9b^2-(16a^2+16b^2)=(3a-5b)^2$

Bài 114: Tìm x,y biết: $x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$

HD:

$x^2+\frac{1}{x^2}-2+\left(y^2+\frac{1}{y^2}-2\right)=0$

Bài 115: Tìm x,y,z biết : $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=\frac{x^2+y^2+z^2}{5}$

HD:

$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{5}\right)+\left(\frac{y^2}{3}-\frac{y^2}{5}\right)+\left(\frac{z^2}{4}-\frac{z^2}{5}\right)=0$

Bài 116: Cho $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$, CMR : $\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}$

HD:

Đặt gt =k=> $a=\frac{x^2-yz}{k},b=\frac{y^2-zx}{k},c=\frac{z^2-xy}{k}$, sau đó tính: a^2-bc,b^2-ca,c^2-ab rồi thay vào

Bài 117: Cho $ax+by+cz=0, a+b+c=\frac{1}{2000}$, CMR : $\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ac(x-z)^2+ab(x-y)^2}=2000$

HD:

Từ $(ax+by+cz)^2=0\Leftrightarrow a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=-2(abxy+bcyz+acxz)$

Xét mẫu số: $bc(y^2-2yz+z^2)+ac(x^2-2xz+z^2)+ab(x^2-2xy+y^2)$

$=bcy^2+bcz^2+acx^2+acz^2+abx^2+aby^2+(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$

$=c(ax^2+by^2+cz^2)+b(ax^2+by^2+cz^2)+a(ax^2+by^2+cz^2)=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)$

$VT=\frac{1}{a+b+c}=2000$

Bài 118: Cho a,b,c là ba số khác 0 thỏa mãn : $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$, CMR :

$(ax+by+cz)^2=(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$

HD:

Đặt gt=k=> $\frac{acy-bcx}{c^2}=\frac{bcx-abz}{b^2}=\frac{abz-acy}{a^2}=k=0=>ay-bx=cx-az=bz-cy=0$

$=>(ay-bx)^2=(cx-az)^2=(bz-cy)^2=0\Leftrightarrow(ay-bx)^2+(cx-az)^2+(bz-cy)^2=0$

$=>(a^2y^2+b^2x^2+c^2x^2+a^2z^2+b^2z^2+c^2y^2)-2(aybx+cxaz+bzcy)=0$

$=>(a^2y^2+a^2z^2+a^2x^2)+(b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2)+(c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2)$

$-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2axby+2bycz+2axcz)=0$

$\Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=0=>$ĐPCM

Bài 119: Cho $x^2-yz=a, y^2-zx=b, z^2-xy=c$ CMR : $ax+by+cz=(x+y+z)(a+b+c)$

Với $x,y,z\neq 0$

HD:

Từ gt=> $\begin{cases}x^3-xyz=ax\\y^3-xyz=by\end{cases}=>ax+by+cz=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$\begin{cases}\\z^3-xyz=cz\end{cases}$

$=>ax+by+cz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x+y+z)(a+b+c)$

Bài 120: Cho 3 số x,y,z thỏa mãn : $\begin{cases}x^2+2y+1=0\\y^2+2z+1=0\\z^2+2x+1=0\end{cases}$, Tính $A=x^{2000}+y^{2000}+z^{2000}$

HD:

Cộng theo vế của gt ta được: $(x^2+2x+1)+(y^2+2y+1)+(z^2+2z+1)=0=>x=y=z=-1$

Bài 121: Cho 3 số x,y,z dương thỏa mãn : xy+x+y=3, yz+y+z=8,zx+z+x=15, Tính $P=x+y+z$

HD:

Từ gt ta có: $\begin{cases}(x+1)(y+1)=4\\(x+1)(z+1)=16\\(y+1)(z+1)=9\end{cases}=>(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=4.16.9=>(x+1)(y+1)(z+1)=24$

Bài 122: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $2x^3+\frac{1}{4}y^3-xyz=-\frac{2}{27}z^3$, Tính giá trị của biểu thức: $N=\left[1-\frac{6x+3y-2z}{6x-3y+2z}\right]^{2018}$

HD:

Vì $2x^3+\frac{1}{4}y^3-xyz=\frac{-2z^3}{27}<=>(6x)^3+(3y)^3+(2z)^3=108xyz$

Áp dụng hằng đẳng thức: $a^3+b^3+c^3=3abc=>\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\a=b=c\end{array}\right.$

Đặt 6x=a, 3y=b, 2z=c, ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc$, mà x, y,z dương nên $6x+3y+2z>0=>6x=3y=2z$ thay vào ta có :

$N=\left(2-\frac{6x+3y-2z}{6x-3y+2z}\right)^{2018}=\left(2-\frac{2z+2z-2z}{2z-2z+2z}\right)^{2018}=0$

Bài 123: Cho a,b,c là ba số thực đôi 1 khác nhau và khác 0, thỏa mãn: $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$,

CMR: abc=1 hoặc abc=-1

HD:

Từ gt=> $a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=>a-b=\frac{b-c}{bc},T^2=>b-c=\frac{c-a}{ca},c-a=\frac{a-b}{ab}$

Nhân theo vế: $(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(abc)^2}=>(a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2-1)=0$

Vì a,b,c khác nhau đôi 1 nên $(abc)^2=1=>abc=1$, hoặc -1

Bài 124: Cho x,y,z thỏa mãn: $by+cz=a,$ và $ax+cz=b$ và $ax+by=c$, Trong đó a,b,c là các số dương cho trước, CMR : $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$, không phụ thuộc vào a,b,c

HD:

Cộng theo vế của gt ta có:

$a+b+c=2(ax+by+cz)=>a+b+c=2(c+cz)=2c(1+z)=>\frac{1}{z+1}=\frac{2c}{a+b+c}$

Tương tự: $\frac{1}{x+1}=\frac{2a}{a+b+c},\frac{1}{y+1}=\frac{2b}{a+b+c}$

Bài 125: Cho $x=\frac{a-b}{a+b},y=\frac{b-c}{b+c},z=\frac{c-a}{c+a}$, Thì $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

HD:

Tính $x+1=\frac{a-b}{a+b}+1=\frac{2a}{a+b}$, Tương tự là ra

Bài 126: Cho a,b,c là ba số thực khác nhau: CMR: $\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{a+c}{c-a}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{a+c}{c-a}.\frac{b+a}{a-b}=-1$

HD:

Đặt: $x=\frac{a+b}{a-b}=>x+1=\frac{2a}{a-b},x-1=\frac{2b}{a-b}$, $y=\frac{b+c}{b-c}=>y+1=\frac{2a}{b-c},y-1=\frac{2c}{b-c}$

$z=\frac{c+a}{c-a}=>z+1=\frac{2c}{c-a},z-1=\frac{2a}{c-a}$, Khi đó: $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)$

Khi đó: $xy+yz+zx=-1$

Bài 127: Cho $x=by+cz$ và $y=ax+by$, $z=ax+by$ và x+y+z khác 0.

Tính giá trị: $A=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$

HD:

Cộng theo vế gt ta được: $x+y+z=2(ax+by+cz)=2(ax+x)=2x(a+1)\Rightarrow \frac{1}{a+1}=\frac{2x}{x+y+z}$

Tương tự: $\frac{1}{b+1}=\frac{2y}{x+y+z},\frac{1}{c+1}=\frac{2z}{x+y+z}$

Bài 128: Cho $\begin{cases}2a=by+cz\\2b=ax+cz\\2c=ax+by\end{cases}$ và $a+b+c\neq 0$, Rút gọn: $M=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}$

HD:

Cộng theo vế gt tacó $2a+2b+2c=2ax+2by+2cz\Leftrightarrow a+b+c=ax+by+cz=ax+2a=a(x+2)$

$\Rightarrow \frac{1}{x+2}=\frac{a}{a+b+c}$, Tương tự: $\frac{1}{y+2}=\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{1}{z+2}=\frac{c}{a+b+c}$

Bài 129: Cho $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1$, CMR trong ba số a,b,c có 1 số bằng tổng hai số kia

HD:

Từ gt ta có: $(a^2+b^2-c^2)c+(b^2+c^2-a^2)a+(c^2+a^2-b^2)b=2abc$

$(a^2+b^2-c^2+2ab)c+(b^2+c^2-a^2-2bc)a+(c^2+a^2-b^2-2ac)b=0$

$(a+b+c)(a+b-c)c+(b-c+a)(b-c-a)a+(c-a+b)(c-a-b)b=0$

$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=0$

$c=a+b$ hoặc $a+c=b$ hoặc: $b+c=a$

Bài 130: Cho $ax+by+cz=0$, Rút gọn $A=\frac{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}{ax^2+by^2+cz^2}$

HD:

Từ $(ax+by+cz)^2=0\Leftrightarrow a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=-2(abxy+bcyz+acxz)$

Xét mẫu số: $bc(y^2-2yz+z^2)+ac(x^2-2xz+z^2)+ab(x^2-2xy+y^2)$

$=bcy^2+bcz^2+acx^2+acz^2+abx^2+aby^2+(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$

$=c(ax^2+by^2+cz^2)+b(ax^2+by^2+cz^2)+a(ax^2+by^2+cz^2)=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)$

Khi đó: $A=\frac{(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)}{ax^2+by^2+cz^2}=a+b+c$

Bài 131: Cho $x+y+z=0$, Rút gọn: $B=\frac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$

HD:

Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$

Khi đó: Mẫu = $2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)=2(x^2+y^2+z^2)+x^2+y^2+z^2=3(x^2+y^2+z^2)$

Vậy $B=\frac{1}{3}$

Bài 132: Cho các số thực a,b,c,x,y,z thỏa mãn: a,b,c$\neq 0$ và $\frac{x^4+y^4+z^4}{a^4+b^4+c^4}=\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}+\frac{z^4}{c^4}$, Tính

$P=x^2+y^9+z^{1945}+2017$

HD:

Từ gt=> $\left(\frac{x^4}{a^4+b^4+c^4}-\frac{x^4}{a^4}\right)+\left(\frac{y^4}{a^4+b^4+c^4}-\frac{y^4}{b^4}\right)+\left(\frac{z^4}{a^4+b^4+c^4}+\frac{z^4}{c^4}\right)=0$

nên $x=y=z=0 \Rightarrow P=2017$

Bài 133: Cho a,b,c là ba số thực $\neq 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, CMR:

$\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}$

HD:

Từ gt ta có: $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c}+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{b+c}{a(a+b+c)}+\frac{b+c}{bc}=0$

TH1: $b+c=0 \Rightarrow b=-c \Rightarrow \frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{-1}{b^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}-b^{2015}}$

TH2: $\frac{1}{a^2+ab+ac}+\frac{1}{bc}=0 \Leftrightarrow bc+a^2+ab+ac=0 \Leftrightarrow (a+b)(a+c)=0 \Rightarrow$ giống TH1:

Bài 134: Cho a,b,c thỏa mãn: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=1006$,

Tính giá trị của biểu thức: $M=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^3}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}$

HD :

$M=2(a+b+c)$

Bài 135: Cho x,y,z thỏa mãn: $x\neq y, xyz\neq 0,$ và $x(y^2-xz)(1-yz)=y(x^2-yz)(1-xz)$,

CMR : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z$

HD:

Từ GT ta có: $(x^2-yz)y(1-xz)=x(1-yz)(y^2-xz)$

$\Leftrightarrow x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2=xy^2-x^2z-x^2yz^2$

$\Leftrightarrow x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2-xy^2+x^2z+xy^3z-x^2yz^2=0$

$\Leftrightarrow xy(x-y)-xyz(yz+y^2-xz-x^2)+z(x^2-y^2)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)[xy-xyz(x+y+z)+xz+yz]=0$

Do x # y nên $xy+xz+yz-xyz(x+y+z)=0$ hay $xy+xz+yz=xyz(x+y+z)$

Bài 136: Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn : $a+b+c=\frac{1}{2}, a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{6}$, Tính giá trị của biểu thức: $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

Bài 137: Cho $x=\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}; y=\frac{(a^2-(b-c)^2)}{((b+c)^2-a^2)}$, Tính giá trị của biểu thức $M=x+y+xy$

Bài 138: Cho biết $\frac{x}{x^2+x+1}=-\frac{2}{3}$, Tính độ dài của biểu thức : $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

HD :

Từ gt ta có : $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{-2}{3}=>\frac{x^2+x+1}{x}=\frac{-3}{2}=>x+\frac{1}{x}+1=\frac{-3}{2}=>x+\frac{1}{x}=\frac{-5}{2}$

Nên $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$ Vậy $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{4}{21}$

(Hoặc ta có thể giải phương trình đầu ra được $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$ rồi thay vào)

Bài 139: CMR: $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$ với x # y, xyz # 0, yz#1, xz#1, thì xy+xz+yz=xyz(x+y+z)

HD:

Từ GT ta có: $\left(x^2-yz\right)y(1-xz)=x(1-yz)\left(y^2-xz\right)$

<=> $x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2=xy^2-x^2z-x^2yz^2$

<=> $x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2-xy^2+x^2z+xy^3z-x^2yz^2=0$

<=> $xy(x-y)-xyz\left(yz+y^2-xz-x^2\right)+z\left(x^2-y^2\right)=0$

<=> $(x-y)\left[xy-xyz(x+y+z)+xz+yz\right]=0$

Do x # y nên $xy+xz+yz-xyz(x+y+z)=0$ hay $xy+xz+yz=xyz(x+y+z)$

Bài 140: Cho x>y>0, hãy so sánh $A=\frac{x-y}{x+y}$ và $B=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

HD:

$A=\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}$, Mà $x^2+y^2+2xy>x^2+y^2, x^2-y^2>0$ nên $A=\frac{x^2-y^2}{2xy+x^2+y^2}<\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Vậy A<B

Bài 141: Cho x(m+n)=y(n+p)=z(p+m), Trong đó x,y,z là các số khác nhau và khác 0

CMR : $\frac{m-n}{x(y-z)}=\frac{n-p}{y(z-x)}=\frac{p-m}{z(x-y)}$

HD :

Từ giải thiết ta có : $\frac{x(m+n)}{xyz}=\frac{y(n+p)}{xyz}=\frac{z(p+m)}{xyz}=>\frac{m+n}{yz}=\frac{n+p}{xz}+\frac{p+m}{xy}$

$=\frac{(p+m)-(n+p)}{xy-xz}=\frac{(m+n)-(p+m)}{yz-xy}=\frac{(n+p)-(m+n)}{xz-yz}=$ ĐPCM

Bài 142: Tính giá trị của biểu thức: a, $A=\frac{x^2-y^2-z^2+2yz}{x^2+xz-y^2-yz}:\frac{x+y-z}{x+y+z}$ với $x=1\frac{2}{3}, y=\frac{8}{3}, z=3\frac{1}{3}$

HD:

Rút gọn biểu thức $A=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x-y)(x+y+z)}:\frac{x+y-z}{x+y+z}=\frac{x-y+z}{x-y}$

Bài 143: Cho các số a,b lần lượt thỏa mãn hệ thức: $a^3-3a^2+5a-2011=0, b^3-3b+5b+2005=0$, Tính a+b

HD:

Từ điều kiện ta có: $(a-1)^3+2(a-1)-2008=0$ và $(b-1)^3+2(b-1)+2008=0$

Cộng theo vế ta được:

$(a-1)^3+(b-1)^3+(a+b-2)=0 \Rightarrow (a+b-2)\left[(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2\right]+2(a+b-2)=0$

$\Rightarrow (a+b-2)\left[(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2+2\right]=0$, Vì $(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2+2$

$=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2+2>0$ nên a+b - 2=0=> a+b=2

Bài 144: Cho các số x, y thỏa mãn đẳng thức: $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0$

Tính giá trị của biểu thức: $M=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2\left(a+b\right)$

Bài 145: Cho x,y,z khác 0 và x-y-z=0, Tính $B=\left(1-\frac{z}{x}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)$

Bài 146: Cho các số a,b,c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{ab}-\frac{b+c-a}{bc}-\frac{c+a-b}{ca}=0$,

CMR trong ba số a,b,c có 1 số bằng tổng hai số kia

Bài 147: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k$ và a+b+c=abc, Tính k để $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=k$

b, $Q=\frac{x}{xy+x+2}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{2z}{xz+2z+2}$ với xyz=2 và các mẫu thức đều khác 0

Bài 148: Tính tổng:

a, $A=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$, $P=\frac{x}{-xy+x+1}-\frac{y}{yz-y+1}+\frac{z}{xz+z-1}$ với xyz=1 và các mẫu thức đều bằng 0

Bài 149:

a, CMR: $n^4+\frac{1}{4}=\left[\left(n-1\right)n+\frac{1}{2}\right]\left[n\left(n+1\right)+\frac{1}{2}\right]$

b, Áp dụng câu a, thu gọn: $A=\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)...\left(13^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)...\left(14^4+\frac{1}{4}\right)}$

Bài 150: Chứng minh với ba số a, b, c đôi 1 khác nhau thì :

$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$

Bài 151: Chứng minh rằng : Nếu $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ và a,b,c,d là các số dương thì a= b= c= d

Bài 152: Cho a, b, c đôi 1 khác nhau thỏa mãn : $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, CMR :

$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

Bài 153: Chứng minh rằng nếu : $x_1+\frac{1}{x_2}=x_2+\frac{1}{x_3}=x_3+\frac{1}{x_4}=...=x_n+\frac{1}{x_1}$, thì $x_1=x_2=x_3=....=x_n$

hoặc : $\left|x_1.x_2.x_3....x_n\right|=1$

Bài 154: Chứng minh rằng nếu a, b, c là các sớ thực thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ và $a+b+c=abc$, thì

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$

Bài 155: Cho $a+b+c=2p$, CMR: $2bc+b^2+c^2-a^2=4p\left(p-a\right)$

Bài 156: Cho $x+y=a,x^2+y^2=b,x^3+y^3=c$, CMR: $a^3-3ab+2c=0$

Bài 157: Cho $a+b+c=0,a^2+b^2+c^2=1$, Tính giá trị của: $M=a^4+b^4+c^4$

Bài 158: Cho a, b, c đôi 1 khác nhau thỏa mãn: $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2$, CMR:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=1$$

Bài 159: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, Tính giá trị của: $M=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

Bài 160: Cho $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$, CMR: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$

Bài 161: Cho $a.x+b.y+c.z=0$, Rút gọn: $A=\frac{a.x^2+b.y^2+c.z^2}{bc\left(y-z\right)^2+ac\left(x-z\right)^2+ab\left(x-y\right)^2}$

Bài 162: Chứng minh rằng nếu: $x+y+z=-3$ thì: $\left(x+1\right)^3+\left(y+1\right)^3+\left(z+1\right)^3=3\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)$

Bài 163: Cho $a+b+c=0,x+y+z=0,\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, CMR: $a.x^2+by^2+cz^2=0$

Bài 164: Cho $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, CMR: $\frac{a}{\left(b-c\right)^2}+\frac{b}{\left(c-a\right)^2}+\frac{c}{\left(a-b\right)^2}=0$

Bài 165: Cho $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$, Hãy tính giá trị của biểu thức: $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

HD:

Từ: $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{-2}{3}=>\frac{x^2+x+1}{x}=\frac{-3}{2}$, hay $x+\frac{1}{x}+1=\frac{-3}{2}=>x+\frac{1}{x}=\frac{-5}{2}$

$=>\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{21}{4}$, vậy $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{4}{21}$

Bài 166: Cho các số a, b, c thỏa mãn các hệ thức sau: $\begin{cases}a^3-3a^2+5a-2011=0\\b^3-3b+5b+2005=0\end{cases}$, Tính a+b

HD:

Từ điều kiện ta có: $\left(a-1\right)^2+2\left(a-1\right)-2008=0$ (1)

Và $\left(b-1\right)^2+2\left(b-1\right)+2008=0$ (2)

Cộng theo vế ta được :

$\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(a+b-2\right)=0<=>\left(a+b-2\right)\left[\left(a-1\right)^2-\left(a-1\right)\left(b-1\right)+\left(b-1\right)^2\right]+2\left(a+b-2\right)=0$

$<=>\left(a+b-2\right)\left[\left(a-1\right)^2-\left(a-1\right)\left(b-1\right)+\left(b-1\right)^2+2\right]=0$

Vì $\left(a-1\right)^2-\left(a-1\right)\left(b-1\right)+\left(b-1\right)^2+2=\frac{1}{2}\left(a-b\right)^2+\frac{1}{2}\left(a-1\right)^2+\frac{1}{2}\left(b-1\right)^2+2>0$

Nên $a+b-2=0<=>a+b=2$

Bài 167: Chứng minh rằng nếu: $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)},(x\neq y),xyz\neq 0,yz\neq 1,xz\neq 1$, thì:

$xy+xz+yz=xyz(x+y+z)$

HD:

Từ GT $\Rightarrow (x^2-yz)y(1-xz)=x(1-yz)(y^2-xz)$

$\Leftrightarrow x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2=xy^2-x^2z-xy^3z+x^2yz^2$

$\Leftrightarrow x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2-xy^2+x^2z+xy^3z-x^2yz^2=0$

$\Leftrightarrow xy(x-y)+xyz(yz+y^2-xz-x^2)+z(x^2-y^2)=0$

$\Leftrightarrow xy(x-y)-xyz(x-y)(x+y+z)+z(x-y)(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)[xy-xyz(x+y+z)+xz+yz]=0$

Do $x-y\neq 0\Rightarrow xy+xz+yz-xyz(x+y+z)=0$

Hay $xy+xz+yz=xyz(x+y+z)$

Bài 168: Cho $x(m+n)=y(n+p)=z(p+m)$, trong đó x, y, z là các số khác nhau và khác 0, CMR :

$\frac{m-n}{x(y-z)}=\frac{n-p}{y(z-x)}=\frac{p-m}{z(x-y)}$

HD :

Vì $xyz\neq 0$ và $x(m+n)=y(n+p)=z(p+m)$

$\Rightarrow \frac{x(m+n)}{xyz}=\frac{y(n+p)}{xyz}=\frac{z(p+m)}{xyz}$, hay $\frac{m+n}{yz}=\frac{n+p}{xz}=\frac{p+m}{xy}$

$=\frac{(p+m)-(n+p)}{xy-xz}=\frac{(m+n)-(p+m)}{yz-xy}=\frac{(n+p)-(m+n)}{xz-yz}$ $=\frac{m-n}{x(y-z)}=\frac{n=p}{y(z-x)}=\frac{p-m}{z(x-y)}$

Bài 169: Rút gọn: $A=\frac{xy+2x+1}{xy+x+y+1}+\frac{yz+2y+1}{yz+y+z+1}+\frac{zx+2z+1}{zx+z+x+1}$

HD:

Ta có: $\frac{xy+2x+1}{xy+x+y+1}=\frac{(xy+x+y+1)+(x-y)}{xy+x+y+1}=1+\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}=1+\frac{x}{x+1}-\frac{y}{y+1}$

$\frac{yz+2y+1}{yz+y+z+1}=1+\frac{y}{y+1}-\frac{z}{z+1}$, $\frac{zx+2z+1}{zx+z+x+1}=1+\frac{z}{z+1}-\frac{x}{x+1}$

Cộng theo vế ta được A=3

Bài 170: Chứng minh rằng: $(x^2+y^2+z^2)^2=2(x^4+y^4+z^4)$, biết rằng: x+y+z=0

HD:

Ta có: $x+y+z=0\Rightarrow x=-(y+z)\Rightarrow x^2=[-(y+z)]^2$

$\Leftrightarrow x^2=y^2+z^2+2xz\Leftrightarrow x^2-y^2-z^2=2xz\Leftrightarrow (x^2-y^2-z^2)^2=(2xz)^2$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2+2y^2z^2=4x^2z^2$ $\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4=2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+x^4+y^4+z^4=x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2$

$\Leftrightarrow 2(x^4+y^4+z^4)=(x^2+y^2+z^2)^2$

BGH DUYỆT **TỔ CHUYÊN MÔN DUYỆT** **GIÁO VIÊN**