

CHUYÊN ĐỀ

BÀI 7: TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Phát biểu được định lý thuận và đảo về tính chất các điểm thuộc đường trung trực.

❖ Kỹ năng

- + Vận dụng được các định lý để giải toán.
- + Ứng dụng trong một số bài toán thực tế.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định lí 1

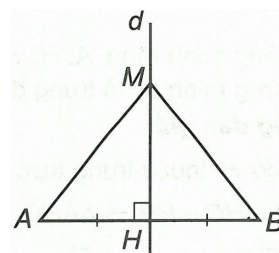
Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

Định lí 2

Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

$$MA = MB \Leftrightarrow M \text{ thuộc đường trung trực của } AB.$$

Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.



$$d \perp AB, HA = HB.$$

$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB.$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Vận dụng tính chất của đường trung trực

Phương pháp giải

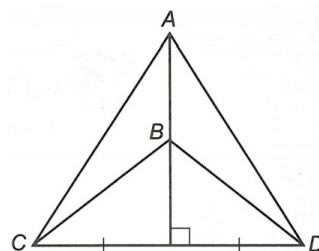
Sử dụng định lí 1:

“Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó”.

Ví dụ: Cho hai điểm A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng CD .

Chứng minh $\triangle CAB = \triangle DAB$.

Hướng dẫn giải



Vì A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng CD (giả thiết).

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = AD \\ BC = BD \end{cases} \text{ (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).}$$

Xét $\triangle CAB$ và $\triangle DAB$ có

$$\begin{cases} AC = AD \\ BC = BD \\ AB \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle CAB = \triangle DAB \text{ (c.c.c)}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên các tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B (không trùng với O). Đường trung trực của các đoạn thẳng OA và OB cắt nhau ở H .

- Chứng minh rằng A, H, B thẳng hàng.
- Chứng minh H là trung điểm của AB .

Hướng dẫn giải

a) Ta có H thuộc trung trực của OA, OB

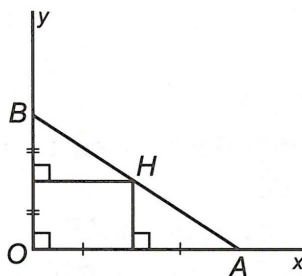
$$\Rightarrow HA = HO = HB \Rightarrow \triangle AHO, \triangle BHO \text{ cân tại } H$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{AHO} = 180^\circ - 2\widehat{AOH} \\ \widehat{BHO} = 180^\circ - 2\widehat{BOH} \end{cases} \text{ (tổng ba góc trong tam giác)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{AHB} &= \widehat{AHO} + \widehat{BHO} \\ &= 180^\circ - 2\widehat{AOH} + 180^\circ - 2\widehat{BOH} \\ &= 360^\circ - 2(\widehat{AOH} + \widehat{BOH}) \\ &= 360^\circ - 2\widehat{AOB} = 360^\circ - 2.90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

Vậy A, H, B thẳng hàng.

b) Từ kết quả câu a) có $HA = HB$ và ba điểm A, H, B thẳng hàng nên H là trung điểm của AB .



Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho $\triangle MNP$ vuông tại M có $\widehat{P} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia MP lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$. Tính số đo $\widehat{NQM}$.

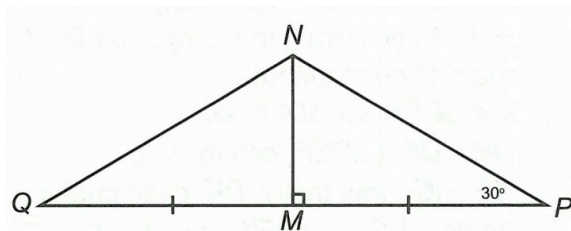
Đáp án

Ta có $MQ = MP$ (giả thiết)

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của } PQ. \quad (1)$$

Lại có $\triangle MNP$ vuông tại M

$$\Rightarrow NM \perp MP \text{ hay } NM \perp PQ. \quad (2)$$



Từ (1), (2) suy ra NM là trung trực của $PQ \Rightarrow NQ = NP$ (tính chất đường trung trực)

$\Rightarrow \triangle NQP$ cân tại N (định nghĩa tam giác cân).

$$\Rightarrow \widehat{NQM} = \widehat{NQP} = \widehat{NPQ} = \widehat{NPM} = 30^\circ.$$

Câu 2: Cho $\widehat{xOy} = 40^\circ$. Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B . Lấy điểm C sao cho OB là đường trung trực của AC .

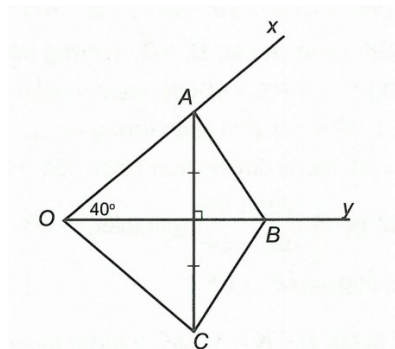
a) Chứng minh $\triangle OAB = \triangle OCB$.

b) Tính số đo $\widehat{AOC}$.

Đáp án

a) Ta có OB là đường trung trực của AC (giả thiết)

$\Rightarrow OA = OC, BA = BC$ (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).



Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OCB$ có

$OA = OC$, $BA = BC$ (chứng minh trên); OB cạnh chung.

Do đó $\triangle OAB = \triangle OCB$ (c.c.c)

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 80^\circ$.

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{C} = 60^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AC = AD$.

a) Chứng minh $\triangle BCD$ là tam giác đều.

b) Biết $BC = 2\sqrt{3}$. Tính độ dài các cạnh AB , AC .

Đáp án

a) Ta có $AC = AD$ (giả thiết).

Mà $BA \perp DC$ ($\triangle ABC$ vuông tại A) nên AB là đường trung trực của DC

$\Rightarrow BD = BC$ (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).

$\Rightarrow \triangle BCD$ cân tại B .

Mặt khác $\widehat{C} = 60^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow \triangle BCD$ đều.

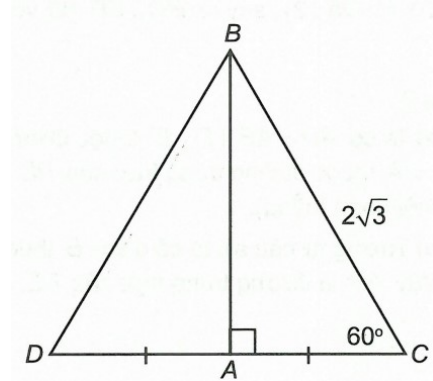
b) Ta có $\triangle BCD$ đều (chứng minh trên)

$$\Rightarrow CD = BC = 2\sqrt{3} \Rightarrow CA = \frac{CD}{2} = \sqrt{3}.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (định lý Pi-ta-go)}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = 3.$$



Dạng 2: Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng

Phương pháp giải

- Để chứng minh điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB , ta dùng định lý 2: “Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó” hoặc dùng định nghĩa đường trung trực.

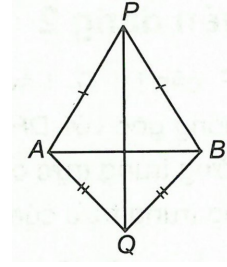
- Để chứng minh đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB , ta chứng minh d chứa hai điểm cách đều A và B , hoặc dùng định nghĩa đường trung trực.

Ví dụ: Cho đoạn thẳng AB . Dựng các tam giác PAB cân tại P , tam giác QAB cân tại Q (P, Q nằm khác phía so với AB). Chứng minh rằng:

a) Điểm P thuộc đường trung trực của AB .

b) PQ là đường trung trực của AB .

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\triangle PAB$ cân tại P nên $PA = PB$

$\Rightarrow P$ thuộc đường trung trực của AB (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng) (1)

b) Lại có $\triangle QAB$ cân tại Q nên $QA = QB$

$\Rightarrow Q$ thuộc trung trực của AB (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng). (2)

Từ (1), (2) suy ra PQ là đường trung trực của AB .

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho góc $\widehat{xOy}$ ($0^\circ < \widehat{xOy} < 90^\circ$), Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ và H là một điểm bất kì thuộc tia Ot . Qua H lần lượt vẽ đường thẳng d và d' thỏa mãn d vuông góc với Ox tại A , cắt Oy tại C và d' vuông góc với Oy tại B , cắt Ox tại D . Chứng minh rằng:

a) OH là đường trung trực của AB .

b) Điểm H thuộc đường trung trực của CD .

Hướng dẫn giải

a) Xét $\triangle HAO$ và $\triangle HBO$ có

$$\widehat{HAO} = \widehat{HBO} = 90^\circ \text{ (vì } HA \perp Ox, HB \perp Oy \text{)};$$

$$\widehat{HOA} = \widehat{HOB} \text{ (do } OH \text{ là phân giác } \widehat{xOy} \text{)};$$

OH cạnh chung.

Do đó $\triangle HAO = \triangle HBO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OB \\ HA = HB \end{cases} \text{ (các cạnh tương ứng)}$$

$\Rightarrow OH$ là trung trực của AB (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).

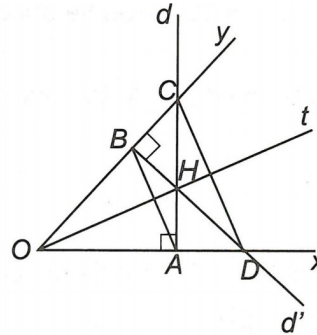
b) Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBD$ có

$$\widehat{OAC} = \widehat{OBD} = 90^\circ \text{ (vì } HA \perp Ox, HB \perp Oy \text{)};$$

$$OA = OB \text{ (chứng minh trên); } \widehat{O} \text{ chung.}$$

Do đó $\triangle OAC = \triangle OBD$ (g.c.g) $\Rightarrow OD = OC$ (hai cạnh tương ứng).

Xét $\triangle ODH$ và $\triangle OCH$ có



$OD = OC$ (chứng minh trên); $\widehat{HOD} = \widehat{HOC}$ (do OH là phân giác $\widehat{xOy}$); OH cạnh chung.

Do đó $\triangle ODH = \triangle OCH$ (g.c.g) $\Rightarrow HD = HC$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow H$ thuộc đường trung trực của CD (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho $\triangle DEF$ cân tại D . Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho $KE = KF$. Kẻ KP vuông góc với DE ($P \in DE$), KQ vuông góc với DF ($Q \in DF$). Chứng minh

a) K thuộc đường trung trực của EF và PQ .

b) DK là đường trung trực của EF và PQ . Từ đó suy ra $PQ \parallel EF$.

Đáp án

a) Ta có $KE = KF$ (giả thiết)

$\Rightarrow K$ thuộc đường trung trực của EF (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).

Xét $\triangle DEK$ và $\triangle DFK$ có

$DE = DF$ ($\triangle DEF$ cân tại D);

$KE = KF$ (giả thiết); DK cạnh chung.

Do đó $\triangle DEK = \triangle DFK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (hai góc tương ứng).

Xét $\triangle DPK$ và $\triangle DQK$ có

$\widehat{DPK} = \widehat{DQK} = 90^\circ$ ($KP \perp DE$, $KQ \perp DF$);

DK cạnh chung; $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle DPK = \triangle DQK$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow KP = KQ$ (hai cạnh tương ứng).

$\Rightarrow K$ thuộc đường trung trực của PQ (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).

b) Ta có $\begin{cases} KE = KF \\ DE = DF \end{cases}$ (giả thiết) $\Rightarrow DK$ là đường trung trực của EF (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng) $\Rightarrow DK \perp EF$. (1)

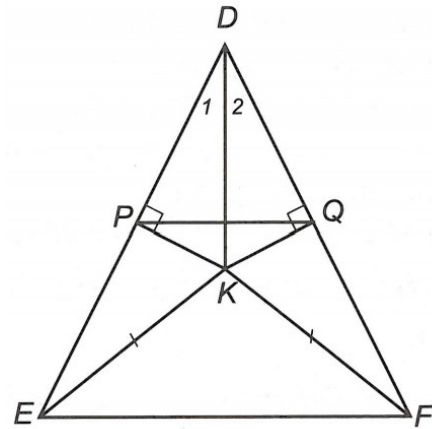
Lại có $\triangle DPK = \triangle DQK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \begin{cases} DP = DQ \\ KP = KQ \end{cases}$ (cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow DK$ là đường trung trực của PQ (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng) $\Rightarrow DK \perp PQ$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $PQ \parallel EF$ (từ vuông góc đến song song).

Câu 2: Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 4 cm và đường tròn tâm B bán kính 3 cm. Hai đường tròn này cắt nhau tại D, E . Chứng minh rằng:

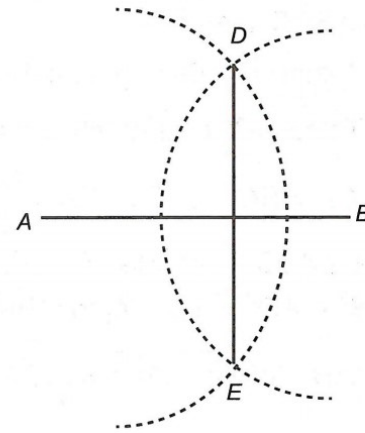
a) Điểm A thuộc đường trung trực của DE .

b) AB là đường trung trực của DE .



Đáp án

- a) Ta có $AD = AE$ (D, E thuộc đường tròn tâm A)
 $\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của DE (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).
- b) Tương tự câu a), ta có điểm B thuộc đường trung trực của DE .
Vậy AB là đường trung trực của DE .



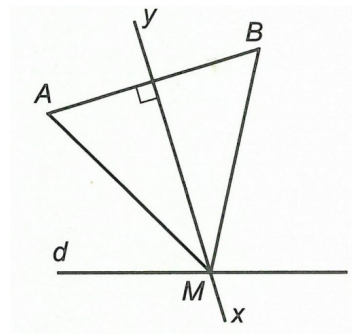
Dạng 3: Xác định vị trí của điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài

Phương pháp giải

Sử dụng định lý 2: “Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó” để xác định một điểm nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng.

Ví dụ: Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d . Biết đường thẳng d và đường thẳng AB cắt nhau. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho M cách đều hai điểm A, B .

Hướng dẫn giải



Vì điểm M cách đều hai điểm A và B nên M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Giả sử trung trực xy của AB cắt d tại M .

Khi đó M là giao điểm của đường thẳng d với đường trung trực của AB và M là điểm duy nhất.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Xác định vị trí điểm D trên cạnh AC sao cho $DA + DB = AC$.

Hướng dẫn giải

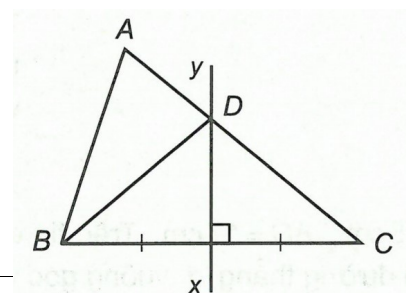
Vẽ xy là trung trực của BC cắt AC tại D

$\Rightarrow D$ là điểm cần xác định.

Thật vậy $DB = DC$ (do D thuộc trung trực của BC)

$\Rightarrow DA + DB = DA + DC$.

Mà $AC = DA + DC$ (vì D nằm giữa A và C)



$$\Rightarrow DA + DB = AC.$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Một con đường quốc lộ cách không xa hai điểm dân cư. Hãy tìm bên đường đó một địa điểm để xây dựng một trạm y tế sao cho trạm y tế này cách đều hai điểm dân cư.

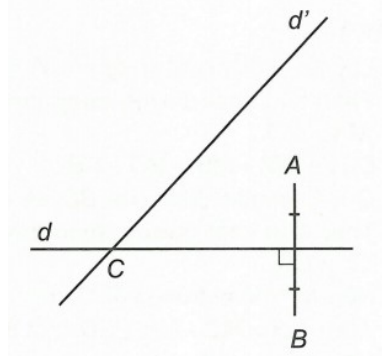
Đáp án

Gọi A và B là hai điểm dân cư, C là điểm đặt trạm y tế, d' là đường quốc lộ.

Vì C cách đều AB nên C thuộc đường trung trực của AB (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).

Mà $C \in d'$ nên C là giao điểm của d' và đường trung trực d của AB .

Do đó để xây dựng trạm y tế ở bên đường cách đều hai điểm dân cư thì trạm y tế đó phải là giao điểm giữa con đường và đường trung trực của AB .



Câu 2: Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $BD = AE$. Chứng minh đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.

Đáp án

Gọi H là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABC$

$\Rightarrow HA = HB$ (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng)

$\triangle ABH$ cân tại H (định nghĩa tam giác cân)

$\Rightarrow \widehat{HBA} = \widehat{HAB}$ (tính chất tam giác cân) (1)

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên đường trung trực AH đồng thời là đường phân giác của góc A

$\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HAC}$. (2)

Từ (1), (2) ta có $\widehat{HBA} = \widehat{HAC}$ hay $\widehat{HBD} = \widehat{HAE}$.

Xét $\triangle HBD$ và $\triangle HAE$ có

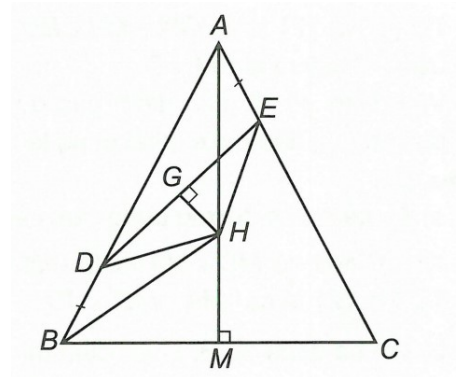
$HA = HB$ (chứng minh trên); $\widehat{HBD} = \widehat{HAE}$ (chứng minh trên);

$BD = AE$ (giả thiết).

Do đó $\triangle HBD = \triangle HAE$ (c.g.c) $\Rightarrow HD = HE$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow H$ thuộc trung trực của DE (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).

Mà H cố định nên đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.



Câu 3: Cho $\triangle ABC$ cố định, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H . Từ H kẻ đường thẳng song song với AI , cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F . Chứng minh rằng:

a) Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của $\triangle ABC$.

b) Khi H di động trên đoạn thẳng IC thì đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

Đáp án

a) Vì $HE \parallel AI$ nên $\widehat{E} = \widehat{A_1}$ (hai góc đồng vị) và $\widehat{F_1} = \widehat{A_2}$ (hai góc so le trong).

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (do AI là phân giác của $\widehat{A}$) nên $\widehat{E} = \widehat{F_1}$

$\Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A (tính chất tam giác cân) $\Rightarrow AE = AF$.

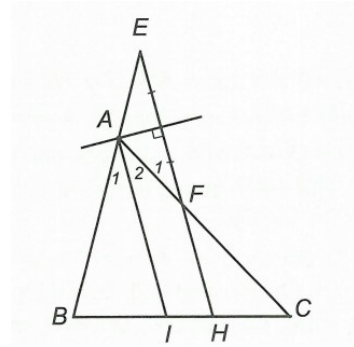
Suy ra A thuộc đường trung trực của EF (tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng).

Vậy đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC .

b) Vì $EF \parallel AI$ nên đường trung trực của EF vuông góc với AI (mối quan hệ giữa vuông góc và song song).

Kết hợp kết quả câu a), suy ra đường trung trực của EF luôn đi qua điểm A và vuông góc với AI cố định.

Vậy đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.



Dạng 4: Sử dụng tính chất đường trung trực vào bài toán về cực trị

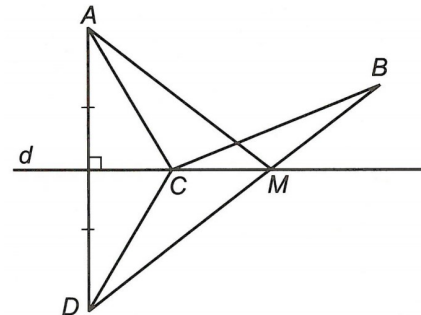
Phương pháp giải

- Sử dụng tính chất đường trung trực để thay đổi độ dài một đoạn thẳng bằng độ dài một đoạn thẳng khác bằng nó.

- Sử dụng bất đẳng thức tam giác để tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

Ví dụ: Hai điểm A, B cùng nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d . Tìm vị trí của điểm C trên đường thẳng d sao cho giá trị của tổng $CA + CB$ là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Bước 1. Xây dựng cặp tổng độ dài đoạn thẳng trung gian.

Bước 2. Lập luận để xác định vị trí điểm cần tìm.

Lấy D là điểm đối xứng với A qua d . Theo tính chất đường trung trực, ta có $CA = CD$.

Do đó $CA + CB = CD + CB$.

Gọi M là giao điểm của BD và d .

Nếu C không trùng với M thì xét $\triangle BCD$, ta có

$$CB + CD > BD \text{ hay } CA + CB > BD. \quad (1)$$

Nếu C trùng với M thì

$$CA + CB = MA + MB = MD + MB = BD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CA + CB \geq BD$.

Do đó khi C trùng M hay C là giao điểm của BD và d thì giá trị của tổng $CA + CB$ nhỏ nhất.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 15\text{ cm}$, $AC = 17\text{ cm}$. Trên tia đối tia AC lấy điểm N sao cho $AN = AB$. Qua A kẻ đường thẳng d vuông góc với BN . M là điểm bất kì trên đường thẳng d .

a) Chứng minh $MB + MC \geq NC$.

b) Tìm vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất và cho biết giá trị đó là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

a) Gọi H là giao điểm của đường thẳng d với BN

$$\Rightarrow AH \perp BN. \quad (1)$$

Xét $\triangle AHN$ và $\triangle AHB$ có

$$\widehat{AHN} = \widehat{AHB} = 90^\circ \quad (AH \perp BN);$$

$$AN = AB \quad (\text{giả thiết});$$

AH cạnh chung.

Do đó $\triangle AHN = \triangle AHB$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow HN = HB \quad (\text{hai cạnh tương ứng}). \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra AH là đường trung trực của BN

$$\Rightarrow M \text{ thuộc đường trung trực của } BN \Rightarrow MN = MB$$

$$\Rightarrow MB + MC = MN + MC.$$

Nếu điểm M không trùng điểm A , xét $\triangle MNC$ có

$$MN + MC > NC \text{ nên } MB + MC > NC. \quad (3)$$

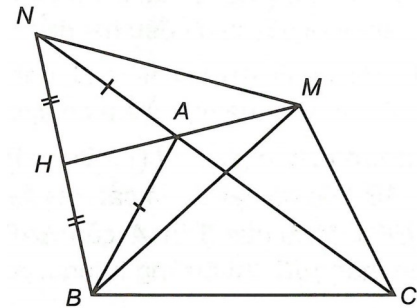
Nếu điểm M trùng điểm A , khi đó

$$MB + MC = AB + AC = AN + AC = NC. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $MB + MC \geq NC$.

b) Từ câu a) ta thấy khi điểm M trùng điểm A thì $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Khi đó $MB + MC = NC = AB + AC = 15 + 17 = 32\text{ (cm)}$.



Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Hai nhà máy được xây dựng tại hai địa điểm A và B cùng nằm về một phía của khúc sông thẳng. Tìm trên bờ sông một địa điểm C để xây dựng trạm bơm sao cho tổng chiều dài đường ống dẫn nước từ C đến A và đến B nhỏ nhất.

Đáp án

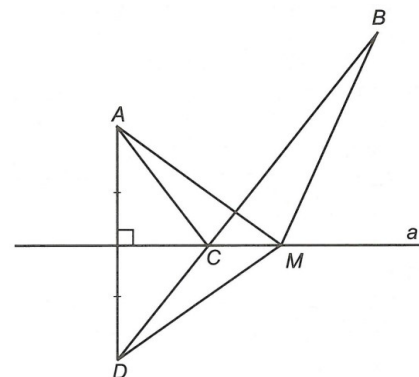
Lấy D là điểm đối xứng với A qua a .

Theo tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng ta có

$$MA = MD.$$

Do đó $MA + MB = MD + MB$.

Gọi C là giao điểm của BD và a .



Theo tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng ta có $CA = CD$.

Nếu M không trùng với C , xét $\triangle MBD$ có

$$MA + MB = MD + MB > BD \text{ (bất đẳng thức tam giác). (1)}$$

Nếu M trùng C thì

$$MA + MB = CA + CB = CD + CB = BD. \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $MA + MB \geq BD$.

Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv C$.

Vậy điểm M là giao điểm của đường thẳng a và BD thì đường ống dẫn nước phải dùng là ngắn nhất.

Câu 2: Đường thẳng a là đường trung trực của đoạn thẳng AB . Trên đường thẳng a lấy điểm M bất kì. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A bờ là đường thẳng a lấy điểm C bất kì ($C \neq A$).

a) Hãy so sánh độ dài của $MA + MC$ với độ dài đoạn CB .

b) Tìm vị trí của M trên đường thẳng a để $MA + MC$ là nhỏ nhất.

Đáp án

a) M nằm trên đường trung trực của $AB \Rightarrow MA = MB$. (1)

Xét $\triangle CMB$ có $MC + MB > BC$ (bất đẳng thức tam giác). (2)

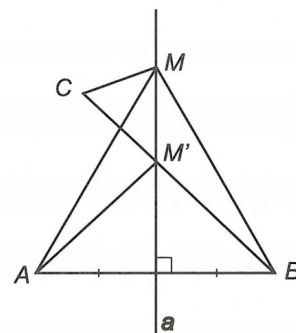
Từ (1), (2) ta có $MA + MC > BC$.

b) Với ba điểm A, B, C cố định thì đoạn thẳng AB cố định nên đường trung trực của AB cũng cố định.

Gọi M' là giao điểm của BC với đường thẳng a .

Điểm M di động trên đường thẳng a thì $MB + MC \geq BC$.

$MB + MC$ nhỏ nhất là bằng độ dài BC khi $M \equiv M'$ hay tổng $MA + MC$ nhỏ nhất là bằng độ dài BC khi M là giao điểm của đường thẳng a với BC .



Câu 3: Cho điểm A nằm trong góc nhọn $\widehat{xOy}$.

a) Tìm hai điểm M, N thuộc Ox và Oy sao cho $AM + AN$ nhỏ nhất

b) Tìm hai điểm B, C thuộc Ox và Oy sao cho $\triangle ABC$ có chu vi nhỏ nhất.

Đáp án

a) Từ A vẽ $AM \perp Ox$, $AN \perp Oy$ ($M \in Ox, N \in Oy$).

Ta có AM nhỏ hơn các đoạn từ A đến Ox và AN nhỏ hơn các đoạn từ A đến Oy (đường vuông góc nhỏ hơn mọi đường xiên).

Vậy để $AM + AN$ có giá trị nhỏ nhất thì M, N lần lượt là hình chiếu của A lên Ox, Oy .

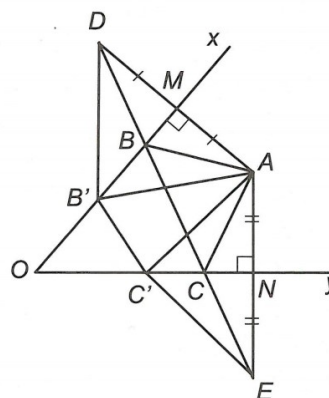
b) Lấy D đối xứng với A qua Ox , lấy E đối xứng với A qua Oy .

Suy ra Ox, Oy lần lượt là đường trung trực của AD, AE .

Đường thẳng DE cắt Ox, Oy lần lượt tại B, C cần tìm.

Thật vậy, lấy hai điểm B', C' bất kì lần lượt thuộc Ox, Oy .

Ta cần chứng minh $AB + BC + CA \leq AB' + B'C' + C'A$.



Vì $B, B' \in Ox$ nên $AB = BD$; $AB' = B'D$ (tính chất điểm thuộc đường trung trực).

Vì $C, C' \in Oy$ nên $AC = CE$; $AC' = C'E$ (tính chất điểm thuộc đường trung trực).

$$\text{Do đó } AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE ; \quad (1)$$

$$AB' + B'C' + C'A = DB' + B'C' + C'E ; \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{cases} DE \leq DB' + B'E \\ B'E \leq B'C' + C'E \end{cases} \Rightarrow DE \leq DB' + B'C' + C'E . \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $AB + BC + CA = DE \leq DB' + B'C' + C'E = AB' + B'C' + C'A$.

Vậy chu vi $\triangle ABC$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng chu vi $\triangle AB'C'$.

Vậy B, C là hai điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài.