

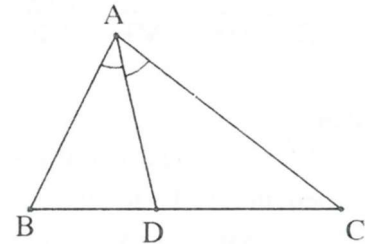
TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lý

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

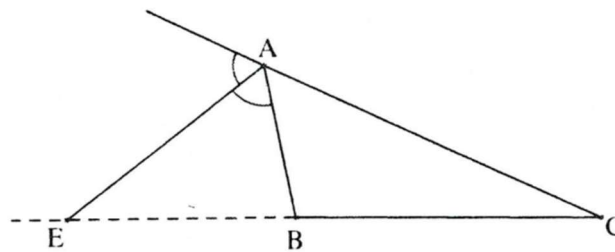
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$



2. Chú ý

* Định lý vẫn đúng với đối với đường phân giác góc ngoài của tam giác.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC (AB \neq AC) \\ \widehat{BAE} = \widehat{CAE} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$



* Các định lý trên có định lý đảo

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD \text{ là đường phân giác trong của tam giác.}$$

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \text{ là đường phân giác ngoài của tam giác.}$$

II. BÀI TẬP MINH HỌA

A. DẠNG BÀI CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính độ dài đoạn thẳng

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Áp dụng tính chất đường phân giác, lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng và sử dụng kỹ thuật đại số hóa hình học.

– Áp dụng định lí Py-ta-go.

VÍ DỤ

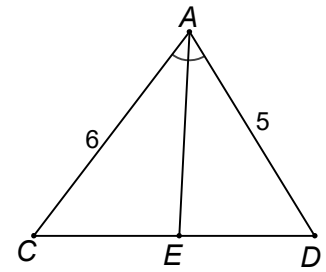
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$ và $CA = 6\text{cm}$. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC ở E . Tính các đoạn EB, EC .

Lời giải (hình 286)

Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABC và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{EB}{BA} = \frac{EC}{CA} = \frac{EB + EC}{BA + CA} = \frac{BC}{BA + CA},$$

$$\text{Hay } \frac{EB}{5} = \frac{EC}{6} = \frac{7}{11} \Rightarrow EB = \frac{35}{11}(\text{cm}); EC = \frac{42}{11}(\text{cm}).$$



Hình 286

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông ở A , đường phân giác BD . Tính AB, BC biết $AD = 4\text{cm}$ và $DC = 5\text{cm}$.

Lời giải (hình 287)

Áp dụng tính chất của đường phân giác BD vào tam giác ABC , ta được:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} AB = 4t \\ BC = 5t \end{cases} \text{ (với } t > 0 \text{)}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABC vuông ở A , ta được:

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } (5t)^2 = 9^2 + (4t)^2$$

$$\Leftrightarrow (3t)^2 = 9^2 \Leftrightarrow 3t = 9 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (vì } t > 0 \text{)}.$$

Vậy $AB = 12(\text{cm})$; $BC = 15(\text{cm})$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $BC = 24\text{cm}$, $AC = 3AB$. Tia phân giác của góc ngoài tại A cắt đường thẳng BC ở E . Tính độ dài EB .

Lời giải (hình 288)

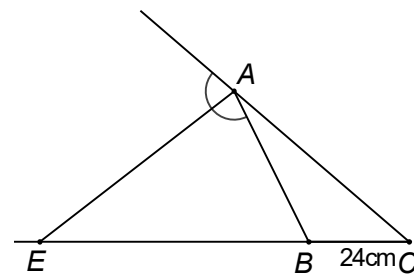
Áp dụng tính chất của đường phân giác ngoài AE vào tam giác ABC , ta được:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{BA}{CA} = \frac{BA}{3BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EB}{1} = \frac{EC}{3}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{EB}{1} = \frac{EC}{3} = \frac{EC - EB}{3 - 1} = \frac{BC}{2} = \frac{24}{2} = 12(\text{cm})$$

Vậy $EB = 12\text{cm}$.



Hình 288

DẠNG 2. Tính tỉ số độ dài, tỉ số diện tích hai tam giác

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Áp dụng tính chất đường phân giác, lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng.
- Sử dụng kỹ thuật đại số hóa hình học. Công thức và kết quả thu được từ công thức tính diện tích tam giác.

VÍ DỤ

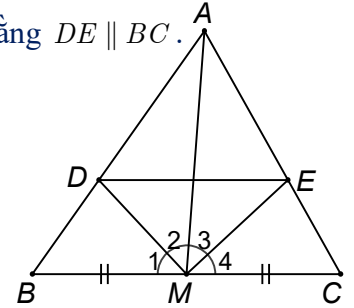
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM . Tia phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D , tia phân giác của góc AMC cắt các cạnh AC ở E . Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

Lời giải (hình 289)

Từ giả thiết AM là trung tuyến, đặt $BM = MC = a$.

Áp dụng tính chất của đường phân giác MD và ME vào hai tam giác AMB và AMC , ta được:

$$\begin{cases} \frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{a} \\ \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MC} = \frac{AM}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$



Hình 289

Điều này chứng tỏ đường thẳng DE cắt hai cạnh AB và AC của tam giác ABC và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, nên $DE \parallel BC$ (theo định lý Ta-lét đảo).

Ví dụ 2.

- Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM và phân giác AD . Tính diện tích tam giác ADM biết $AB = m, AC = n$ ($n > m$).
- Cho $n = 7cm, m = 3cm$. Hỏi diện tích tam giác ADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích tam giác ABC ?

Lời giải (hình 290)

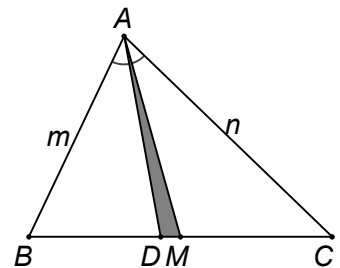
$$\text{a) Ta có } \frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{DM}{BC} \text{ hay } S_{ADM} = \frac{DM}{BC} \cdot S$$

(vì chung chiều cao kẻ từ A đến BC , với $S = S_{ABC}$).

Ta còn phải tính tỉ số $DM : BC$.

Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABC , ta được:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n} \Rightarrow \begin{cases} DB = mt \\ DC = nt \end{cases} \text{ (với } t > 0 \text{)}.$$



Hình 290

Do đó $BC = DB + DC = (m + n).t$, nên: $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{(m + n)t}{2}$.

$$\Rightarrow DM = BM - BD = \frac{(m + n)t - mt}{2} = \frac{(n - m)t}{2}.$$

Suy ra tỉ số $DM : BC = \frac{(n - m)t}{2} : (m + n)t = \frac{n - m}{2(m + n)}$.

Vậy $S_{ADM} = \frac{n - m}{2(m + n)}.S$.

b) Với $n = 7cm, m = 3cm$ thì $S_{ADM} = \frac{7 - 3}{2(7 + 3)}.S = 0,2.S = 20\%S$.

Điều này chứng tỏ diện tích tam giác ADM chiếm 20% diện tích tam giác ABC .

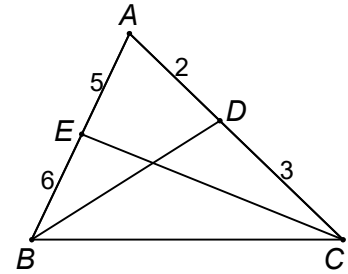
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , các đường phân giác BD và CE . Biết $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}; \frac{EA}{EB} = \frac{5}{6}$. Tính các cạnh của tam giác ABC , biết chu vi tam giác bằng $45cm$.

Lời giải (hình 291)

Áp dụng tính chất của các đường phân giác BD và CE vào tam giác ABC , ta được:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \begin{cases} AB = 4t \\ BC = 6t \end{cases} \text{ (với } t > 0);$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} AC = 5t \\ BC = 6t \end{cases}.$$



Hình 291

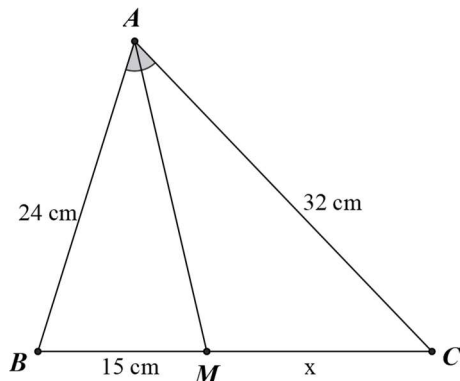
Từ giả thiết chu vi của tam giác ABC bằng $45cm$, ta có:

$$45 = AB + BC + CA = 4t + 6t + 5t = 15t \Leftrightarrow t = 3.$$

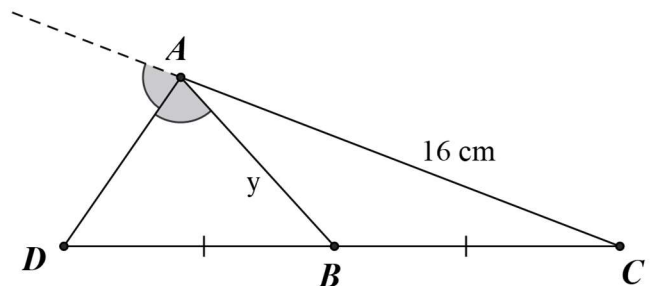
Vậy $AB = 12cm; BC = 18cm; CA = 15cm$.

PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN DẠNG CƠ BẢN

Bài 1: Tính độ dài x, y trong các hình vẽ sau:



Hình 1



Hình 2

Bài 2: Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, các đường phân giác BD và CE cắt nhau ở I .

a) Tính các độ dài AD, DC .

b) Tính các độ dài AE, BE .

Bài 3: Cho tam giác cân ABC có $AB = BC$. Đường phân giác góc A cắt BC tại M , đường phân giác góc C cắt BA tại N . Chứng minh $MN \parallel AC$.

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ có AD, BE, CF là các đường phân giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$

Bài 5: Cho hình bình hành $ABCD$. Phân giác của $\hat{A}$ và $\hat{D}$ cắt các đường chéo BD và AC lần lượt tại M và N . Chứng minh: MN song song với AD .

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ có phân giác AD , biết $AB = m, AC = n$.

a) Tính tỉ số diện tích của $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ theo m và n .

b) Vẽ phân giác DE của $\triangle ADB$ và vẽ phân giác DF của $\triangle ADC$. Chứng minh rằng:
 $AF \cdot CD \cdot BE = AE \cdot BD \cdot CF$.

Bài 7: Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM , đường phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt AB ở D , đường phân giác của $\widehat{AMC}$ cắt AC ở E .

a) Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

b) Gọi I là giao điểm của AM và DE . Chứng minh rằng $DI = IE$.

c) Tính DE , biết $BC = 30\text{cm}, AM = 10\text{cm}$.

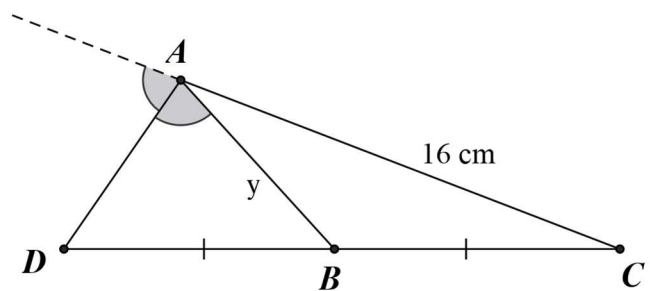
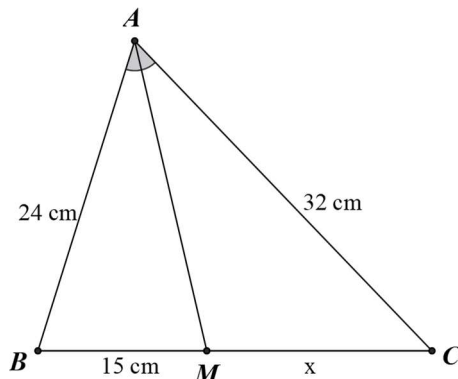
d) $\triangle ABC$ phải thêm điều kiện gì để ta có $DE = AM$?

e) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân nếu biết $MD = ME$.

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Đường cao AH và đường phân giác BE cắt nhau tại I . Chứng minh rằng: $CE = 2 \cdot HI$.

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI CƠ BẢN

Bài 1:



Hình 2

Hình 1

a) Xét $\triangle ABC$ có AM là đường phân giác trong nên: $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$

$$\text{Hay } \frac{15}{x} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 4}{3} = 20 (cm)$$

b) Xét $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác ngoài nên: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

Mà B là trung điểm của đoạn thẳng DC nên: $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{1}{2} = \frac{y}{16} \Rightarrow y = 8 (cm)$$

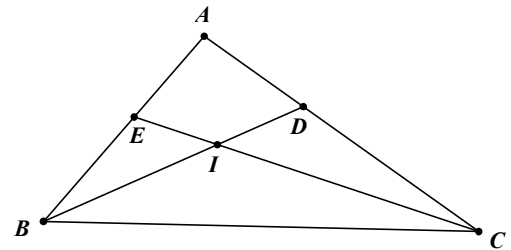
Bài 2: a) Theo tính chất đường phân giác: $\frac{AD}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{CD}{3} = 1$.

Do đó, $AD = 2cm, CD = 3cm$.

b) Ta có: Theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{AE}{5} = \frac{EB}{6} = \frac{4}{11}.$$

$$\text{Do đó, } AE = \frac{20}{11} cm, BE = \frac{24}{11} cm.$$

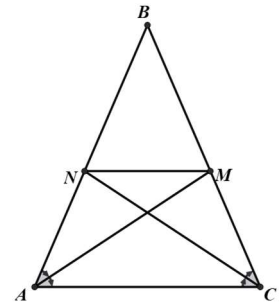


Bài 3: AM là phân giác của $\hat{A}$ nên $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$.

CN là phân giác của $\hat{C}$ nên $\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AC}$.

Lại có: $AB = BC$.

$$\text{Suy ra: } \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{BM}{CM} \Rightarrow MN \parallel AC.$$



Bài 4: Xét $\triangle ABC$, áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

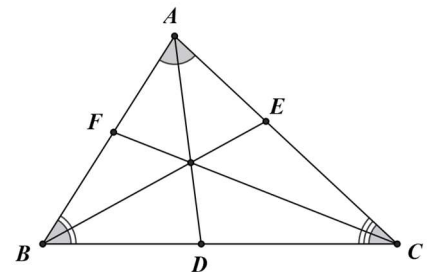
$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \quad (1)$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

$$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} \quad (3)$$

Nhân (1), (2), (3) theo vế ta được:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1.$$



Bài 5: Gọi O là giao điểm của BD và AC.

Xét tam giác ABD, phân giác AM, ta có: $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DM}$

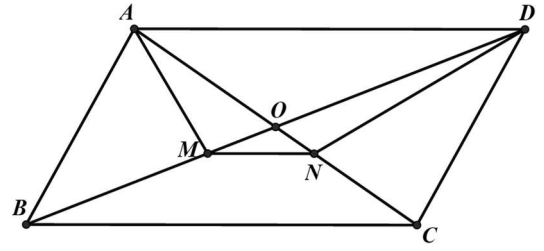
Tương tự, $\frac{CD}{AD} = \frac{CN}{AN}$;

Mà $AB = CD$, suy ra $\frac{BM}{DM} = \frac{CN}{AN}$

Từ đó, ta có:

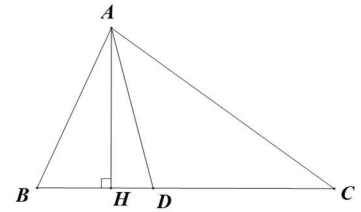
$$\frac{BM}{DM} + 1 = \frac{CN}{AN} + 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{CA}{AN} \Leftrightarrow \frac{DO}{DM} = \frac{AO}{AN}$$

Suy ra $MN \parallel AD$.



Bài 6: a) Vẽ đường cao AH của $\triangle ABC$. Vì $\triangle ABC$ có phân giác AD nên:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}. \text{ Vậy } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot BD}{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD} = \frac{BD}{CD} = \frac{m}{n}$$

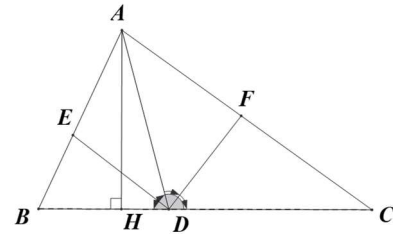


b) Ta có: $\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CD}$ (do DF là phân giác $\widehat{ADC}$)

$$\frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AD} \text{ (do DE là phân giác } \widehat{ADB} \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{CF} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BE}{AE} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BD}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow AF \cdot CD \cdot BE = AE \cdot BD \cdot CF$$



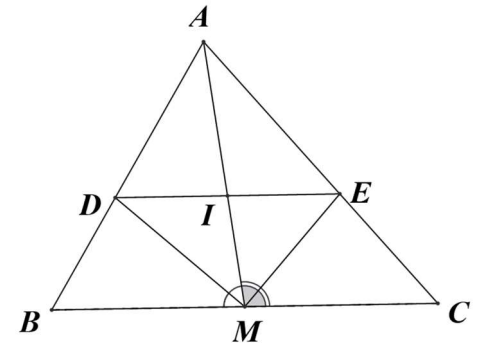
Bài 7: a) Ta có

$$\frac{BD}{AD} = \frac{MB}{MA} \text{ (do MD là phân giác của } \widehat{AMB} \text{)}$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{MC}{MA} \text{ (do ME là phân giác của } \widehat{AMC} \text{)}$$

Mà $MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow DE \parallel BC$$



b) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ lần lượt có $DI \parallel BM$ và $EI \parallel CM$.

$$\frac{DI}{BM} = \frac{EI}{CM} \left(= \frac{AI}{AM} \right) \text{ Mà } BM = CM \Rightarrow DI = EI$$

c) Ta có: $\frac{BD}{AD} = \frac{MB}{MA}$. Mà $\frac{BD}{AD} = \frac{IM}{AI}$ (do $DI \parallel BM$) $\Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{IM}{AI}$

Ta lại có: $\frac{BM}{DI} = \frac{AM}{AI}$ (do $DI \parallel BM$)

$$\frac{BM}{DI} = \frac{AI + IM}{AI} = 1 + \frac{IM}{AI} = 1 + \frac{BM}{AM} = \frac{AM + BM}{AM}$$

$$\Rightarrow DI = \frac{BM \cdot AM}{AM + BM} = \frac{15 \cdot 10}{10 + 15} = \frac{150}{25} = 6$$

$$\Rightarrow ED = 2DI = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (do } DI = IE = \frac{1}{2}DE \text{)}$$

d) Để $DE = AM$ ta cần tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật

Hay $DM \parallel AE, EM \parallel AD, \widehat{BAC} = 90^\circ$

Khi $\widehat{BAC} = 90^\circ$ thì $AM = MB = MC$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC)

$\Rightarrow \triangle ABM, \triangle ACM$ cân tại M

$\Rightarrow MD \perp AB, ME \perp AC$ (đường phân giác của tam giác cân đồng thời là đường cao)

Mà $AB \perp AC$. Suy ra $DM \parallel AE, EM \parallel AD$. Suy ra tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A thì $DE = AM$.

e) Khi $DM = EM$ thì $\triangle DME$ cân tại M có MI là trung tuyến ($DI = IE$) nên đồng thời là đường cao $\Rightarrow MI \perp DE$

Mà $DE \parallel BC$ (cmt) nên $MI \perp BC$

$\triangle ABC$ có AI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên là tam giác cân.

Bài 8: Ta có $\widehat{AIE} = \widehat{BAH} + \widehat{ABI} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) = 45^\circ + \frac{1}{2}\widehat{B} = 45^\circ + \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{AEI}$.

Suy ra $\triangle AIE$ cân tại $A \Rightarrow AI = AE$ (1).

Áp dụng tính chất đường phân giác của $\triangle ABH$ và $\triangle BAC$ ta có:

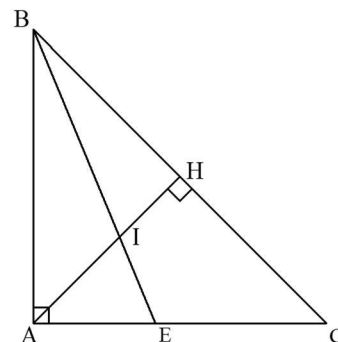
$$\frac{IH}{IA} = \frac{BH}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{BH}{IH} \text{ (2); } \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EC} \text{ (3)}$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\frac{BH}{IH} = \frac{BC}{EC}$ (4)

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $BC = 2 \cdot BH$

Từ đó kết hợp với (4) suy ra $EC = 2 \cdot IH$.

B.DẠNG BÀI NÂNG CAO



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có G là trọng tâm, BM là đường phân giác. Biết rằng $GM \perp AC$. Chứng minh rằng BM vuông góc với trung tuyến AD .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng qua I cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F sao cho D, E nằm cùng phía đối với điểm I . Chứng minh rằng: $\frac{BC}{ID} + \frac{AC}{IE} = \frac{AB}{IF}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), vẽ đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = AH$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E . Gọi M là trung điểm của BE , tia AM cắt BC tại G . Chứng minh: $\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao (H thuộc BC), N là trung điểm của AB . Biết $AB=6\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$.

- Vẽ AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ (K thuộc BC). Tính AK ?
- Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên AC và T là điểm đối xứng của N qua I với I là giao điểm của CN và HE . Chứng minh tứ giác $NETH$ là hình bình hành.

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI NÂNG CAO

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có G là trọng tâm, BM là đường phân giác. Biết rằng $GM \perp AC$. Chứng minh rằng BM vuông góc với trung tuyến AD .

Giải

Cách 1. (Không dùng tính chất đường phân giác). Gọi I là giao điểm của BM và AD , H là trung điểm $AC \Rightarrow DH \parallel AB$ và $DH = \frac{1}{2}AB$ (vì DH là đường trung bình $\triangle ABC$).

Lại có $GM \parallel AB$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow GM \parallel DH$. Áp dụng hệ quả định lý ta-lét:

Xét $\triangle ADH$ có $\Rightarrow GM \parallel DH$

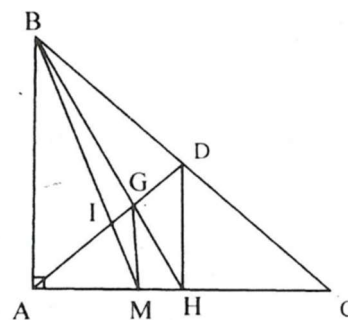
$$\Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABI \text{ có } GM \parallel AB \Rightarrow \frac{GI}{AI} = \frac{GM}{AB} = \frac{GH}{BH} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{GI + AI}{AI} = \frac{A + 3}{3} \Rightarrow AI = \frac{3}{4} \cdot AG = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot AD \Rightarrow AI = \frac{AD}{2}$$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AD .

$\triangle ABD$ có BI vừa là đường phân giác, vừa là đường trung tuyến, suy ra $\triangle ABD$ cân tại B nên BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác. Do đó $BM \perp AD$.



Cách 2. $\triangle ADH$ có $GM \parallel DH \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \cdot AM = 2 \cdot AH = AC = AM + MC$

hay $MC = 2 \cdot AM$.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MC}{MA} = 2 \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = BD.$$

Vậy $\triangle ABD$ cân tại B nên BI vừa là phân giác vừa là đường cao.

Do đó $BM \perp AD$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng qua I cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F sao cho D, E nằm cùng phía đối với điểm I . Chứng minh rằng: $\frac{BC}{ID} + \frac{AC}{IE} = \frac{AB}{IF}$.

Giải

Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác, ta có:

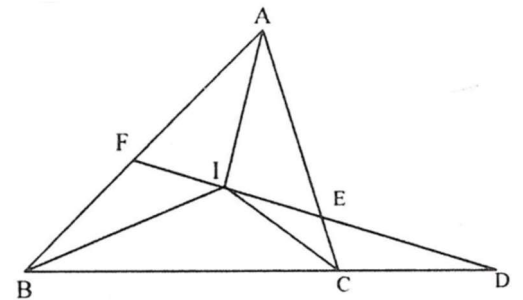
$$\frac{BD}{ID} = \frac{BF}{IF}; \frac{CE}{IE} = \frac{CD}{ID}; \frac{AF}{IF} = \frac{AE}{IE}$$

$$\text{Ta có: } \frac{BC}{ID} = \frac{BD}{ID} - \frac{CD}{ID} = \frac{BF}{IF} - \frac{CE}{IE} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{AC}{IE} = \frac{AE}{IE} + \frac{CE}{IE} = \frac{AF}{IF} + \frac{CE}{IE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, suy ra:

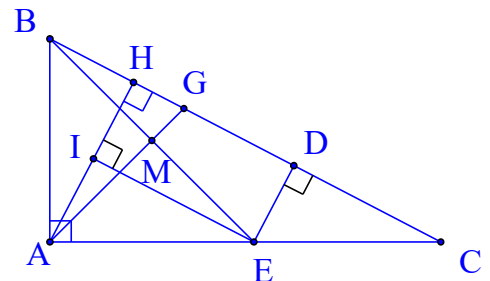
$$\frac{BC}{ID} + \frac{AC}{IE} = \frac{BF}{IF} + \frac{AF}{IF} = \frac{AB}{IF}.$$



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), vẽ đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = AH$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E . Gọi M là trung điểm của BE , tia AM cắt BC tại G . Chứng minh: $\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

Giải:

$$\begin{aligned} \frac{BG}{BC} &= \frac{HD}{AH + HC} \\ \Rightarrow \frac{BC}{BG} &= \frac{AH + HC}{HD} = 1 + \frac{HC}{HD} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{BC}{BG} - 1 = \frac{HC}{HD} \Rightarrow \frac{BC - BG}{BG} = \frac{HC}{HD} \Rightarrow \frac{GC}{GB} = \frac{HC}{HD}$$

Ta chứng minh: $\frac{HC}{HD} = \frac{GC}{GB}$. Ta có: $DE \parallel AH \Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE}$.

Dựng đường thẳng qua E vuông góc AH tại I, suy ra HIED là hình chữ nhật.

$IE = HD = HA$; $\widehat{IAE} = \widehat{HBA}$ do đó hai tam giác vuông IEA và HBA bằng nhau.

$$\Rightarrow AE = AB \Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{AB}.$$

Vì M là trung điểm BE, tam giác ABE cân tại A nên AM là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ hay G là chân đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ trong tam giác ABC. Từ đó ta có:

$$\frac{GC}{GB} = \frac{AC}{AB}. \text{ Vậy } \Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{GC}{GB}.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao (H thuộc BC), N là trung điểm của AB. Biết AB=6cm, AC=8cm.

a) Vẽ AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ (K thuộc BC). Tính AK?

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên AC và T là điểm đối xứng của N qua I với I là giao điểm của CN và HE. Chứng minh tứ giác NETH là hình bình hành.

Giải:

a) Theo tính chất chân đường phân giác trong ta có:

$$\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{CK}{CB} = \frac{4}{7}.$$

Gọi K' là hình chiếu vuông góc của K lên AC, suy ra $KK' \parallel AB$. Theo định lý Talet ta có:

$$\frac{KK'}{AB} = \frac{CK}{CB} = \frac{4}{7} \Rightarrow KK' = \frac{4}{7} \cdot AB = \frac{4}{7} \cdot 6 = \frac{24}{7} (\text{cm}).$$

Mặt khác, tam giác AKK' vuông cân tại K' nên:

$$AK = KK' \cdot \sqrt{2} = \frac{24}{7} \sqrt{2} (\text{cm}).$$

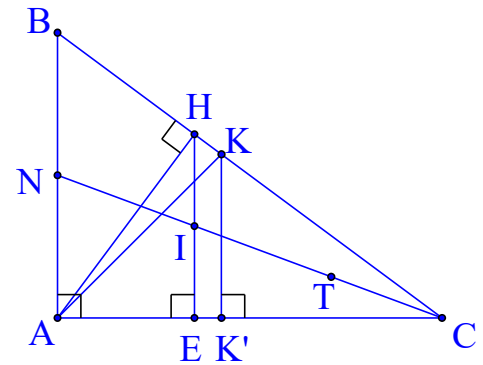
b) Ta chứng minh I là trung điểm của HE.

Vì $HE \perp AC$ nên $HE \parallel BA$. Theo định lý Talet ta có: $\frac{IE}{NA} = \frac{CI}{CN} = \frac{IH}{NB}$.

Vì $NA = NB$ nên $IE = IH$. Do đó I là trung điểm của HE.

Theo giả thiết thì I là trung điểm của NT.

Tứ giác NETH có hai đường chéo NT và EH có chung trung điểm I nên NETH là hình bình hành.



===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====