

CHUYÊN ĐỀ 3. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC.

CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

BÀI 4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Phát biểu được định nghĩa đường trung tuyến của tam giác.
- + Phát biểu được tính chất ba đường trung tuyến của tam giác.

❖ Kỹ năng

- + Vẽ được các đường trung tuyến của tam giác.
- + Vận dụng được các định nghĩa và tính chất về đường trung tuyến.

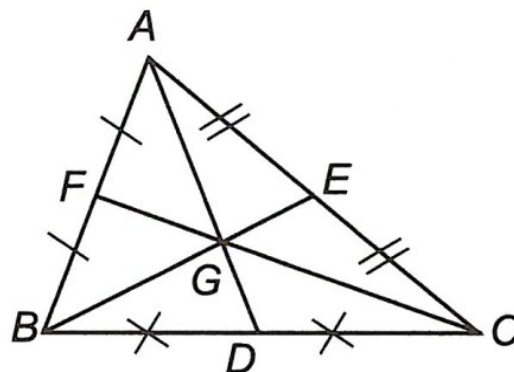
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến

- Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm.
- Điểm gặp nhau của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác.

Vị trí của trọng tâm trên đường trung tuyến

- Trọng tâm của tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.



Ta có G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$GA = \frac{2}{3}AD; GB = \frac{2}{3}BE; GC = \frac{2}{3}CF$$

$$\text{hay } \frac{AG}{AD} = \frac{BG}{BE} = \frac{CG}{CF} = \frac{2}{3}.$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

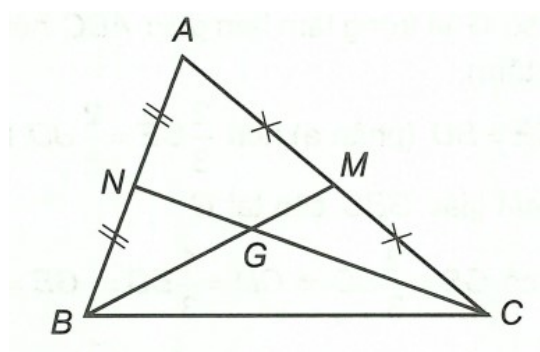
Dạng 1: Sử dụng tính chất trọng tâm tam giác

Phương pháp giải

- Ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm này gọi là trọng tâm của tam giác.
- Trọng tâm của tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM , CN cắt nhau tại G . Chứng minh rằng

$$BM + CN > \frac{3}{2}BC.$$



Hướng dẫn giải

Bước 1. Xác định trọng tâm nằm trên đường trung tuyến nào.

Bước 2. Sử dụng linh hoạt tỉ lệ khoảng cách từ trọng tâm đến hai đầu đoạn thẳng trung tuyến.

Xét tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G . Suy ra G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM; CG = \frac{2}{3}CN$$

$$\Rightarrow BM = \frac{3}{2}BG; CN = \frac{3}{2}CG.$$

Do đó ta phải chứng minh $\frac{3}{2}BG + \frac{3}{2}CG > \frac{3}{2}BC$

hay $BG + CG > BC$. (1)

Bất đẳng thức (1) luôn đúng vì trong một tam giác tổng độ dài hai cạnh lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Vậy $BM + CN > \frac{3}{2}BC$. (điều phải chứng minh).

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G .

a) Chứng minh $BD = CE$.

b) Chứng minh tam giác GBC là tam giác cân.

c) Chứng minh $GD + GE > \frac{1}{2}BC$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC$ mà $AB = 2BE$;

$AC = 2CD$ (vì E, D theo thứ tự là trung điểm của AB, AC).

Do đó ta có $2BE = 2CD$ hay $BE = CD$.

Xét $\triangle BCE$ và $\triangle CBD$ có

$BE = CD$ (chứng minh trên); $\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$; BC là cạnh chung.

Do đó $\triangle BCE = \triangle CBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow CE = BD$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có G là trọng tâm tam giác ABC nên $BG = \frac{2}{3}BD$

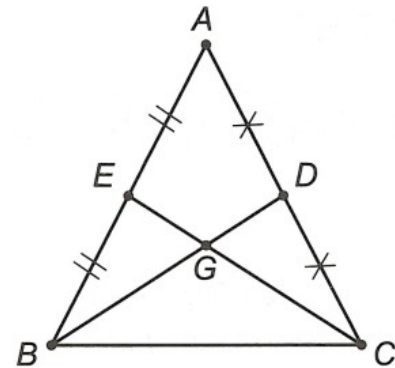
và $CG = \frac{2}{3}CE$ (tính chất trọng tâm).

Mà $CE = BD$ (phần a) nên $\frac{2}{3}CE = \frac{2}{3}BD$ hay

$CG = BG$.

Vậy tam giác GBC cân tại G .

c) Ta có



$$GB = \frac{2}{3}BD \Rightarrow GD = \frac{1}{3}BD \Rightarrow GB = 2GD \Rightarrow GD = \frac{1}{2}GB$$

Chúng minh tương tự, ta có $GE = \frac{1}{2}GC$.

$$\text{Do đó } GD + GE = \frac{1}{2}GB + \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}(GB + GC).$$

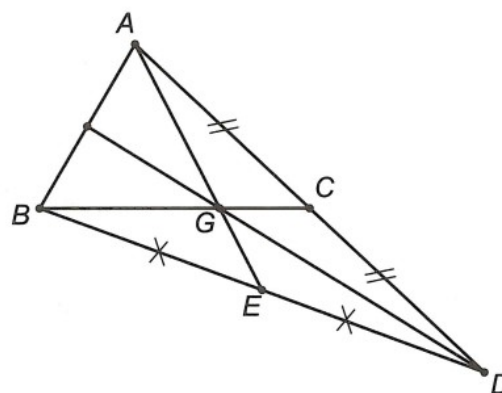
Mà $GB + GC > BC$ (trong một tam giác tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại).

$$\text{Do đó } GD + GE > \frac{1}{2}BC \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC lấy điểm G sao cho $BG = 2GC$. Vẽ điểm D sao cho C là trung điểm của AD . Gọi E là trung điểm của BD .

Chúng minh

- Ba điểm A, G, E thẳng hàng.
- Đường thẳng DG đi qua trung điểm của AB .



Hướng dẫn giải

- Xét tam giác ABD có C là trung điểm của cạnh $AD \Rightarrow BC$ là trung tuyến của tam giác ABD .

Hơn nữa $G \in BC$ và $GB = 2GC \Rightarrow GB = \frac{2}{3}BC \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABD .

Lại có AE là đường trung tuyến của tam giác ABD nên A, G, E thẳng hàng.

- Ta có G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow DG$ là đường trung tuyến của tam giác này. Suy ra DG đi qua trung điểm của cạnh AB (điều phải chứng minh).

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho tam giác ABC cân ở A , đường trung tuyến AM .

- Chúng minh $AM \perp BC$
- Tính AM biết rằng $AB = 10cm, BC = 12cm$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến AX, BY, CZ cắt nhau tại G . Biết $GA = GB = GC$. Chúng minh $GX = GY = GZ$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G . Biết $AD = 4,5cm, BE = 6cm$. Tính độ dài AB .

Câu 4: Chứng minh rằng trong tam giác tổng độ dài ba đường trung tuyến nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi tam giác đó.

Dạng 2: Chứng minh một điểm là trọng tâm tam giác

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất trọng tâm. Chẳng hạn để chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC , có ba đường trung tuyến AD, BE, CF thì ta chứng minh

Cách 1. $G \in AD$ và $GA = \frac{2}{3}AD$;

hoặc $G \in BE$ và $GB = \frac{2}{3}BE$;

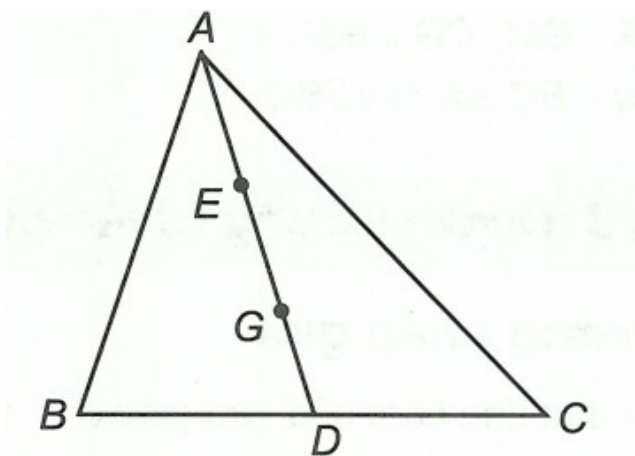
hoặc $G \in CF$ và $GC = \frac{2}{3}CF$.

Cách 2.

Chứng minh G là giao điểm của hai trong ba đường trung tuyến của tam giác ABC .

Ví dụ: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD , trên đoạn thẳng AD lấy hai điểm E, G sao cho $AE = EG = GD$. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC .

Hướng dẫn giải



Ta có $AD = AE + EG + GD$ mà $AE = EG = GD$ nên $AD = 3AE$

$$\Rightarrow AE = EG = GD = \frac{1}{3}AD \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AD.$$

Vì AD là đường trung tuyến và $AG = \frac{2}{3}AD$ nên G là trọng tâm tam giác ABC .

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho tam giác ABC , D là trung điểm của AC . Trên đoạn BD lấy điểm E sao cho $BE = 2ED$. Điểm F thuộc tia đối của tia DE sao cho $BF = 2BE$. Gọi K là trung điểm của CF và G là giao điểm của EK với AC .

a) Chứng minh G là trọng tâm tam giác EFC .

b) Tính các tỉ số $\frac{GE}{GK}$; $\frac{GC}{DC}$.

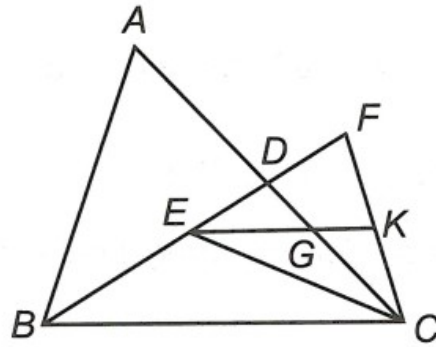
Hướng dẫn giải

a) Ta có $BF = 2BE \Rightarrow BE = EF$.

Mà $BE = 2ED$ nên $EF = 2ED \Rightarrow D$ là trung điểm của $EF \Rightarrow CD$ là đường trung tuyến của tam giác EFC .

Vì K là trung điểm của CF nên EK là đường trung tuyến của $\triangle EFC$.

$\triangle EFC$ có hai đường trung tuyến CD và EK cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của $\triangle EFC$.



b) Ta có G là trọng tâm tam giác EFC nên $\frac{GC}{DC} = \frac{2}{3}$ và $GE = \frac{2}{3}EK$

$$\Rightarrow GK = \frac{1}{3}EK \Rightarrow GE = 2GK \Rightarrow \frac{GE}{GK} = 2.$$

📌 Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho tam giác ABC , điểm M thuộc đoạn thẳng BC sao cho $BM = 2MC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CA$. Gọi E là giao điểm của AM và BD .

a) Chứng minh M là trọng tâm tam giác ABD .

b) Chứng minh AM đi qua trung điểm của BD .

Câu 2: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BD , CE cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia DB lấy điểm M sao cho $DM = DG$. Trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho $EN = EG$. Chứng minh rằng:

a) $BG = GM$; $CG = GN$.

b) $MN = BC$ và $MN \parallel BC$.

Dạng 3. Đường trung tuyến của tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông

📌 Phương pháp giải

Chú ý đến tính chất của tam giác cân, tam giác đều và tam giác vuông.

📌 Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho tam giác đều ABC có ba đường trung tuyến

AD , BE , CF cắt nhau tại G .

Chứng minh

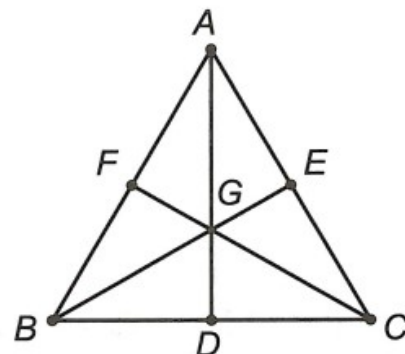
a) $AD = BE = CF$.

b) $GA = GB = GC$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có BE , CF là các đường trung tuyến của tam giác

$$ABC \Rightarrow CE = \frac{1}{2}AC; BF = \frac{1}{2}AB.$$



Vì $AC = AB$ nên $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB$ hay $CE = BF$.

Xét tam giác BCE và tam giác CBF có

BC chung; $\widehat{BCE} = \widehat{CBF}$ (do tam giác ABC cân ở A);

$CE = BF$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle BCE = \triangle CBF$ (c.g.c)

$\Rightarrow BE = CF$ (2 cạnh tương ứng).

Chứng minh tương tự ta có $AD = BE$.

Từ đó suy ra $AD = BE = CF$ (điều phải chứng minh).

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $AG = \frac{2}{3}AD$;

$$BG = \frac{2}{3}BE; \quad CG = \frac{2}{3}CF.$$

Vì $AD = BE = CF$ (theo a) nên $\frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$ hay

$AG = BG = CG$ (điều phải chứng minh)

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G . Biết $BE = CF$ Chứng minh $AG \perp BC$.

Câu 2: Chứng minh rằng trong một tam giác, đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm tam giác

Câu 1.

a) AM là đường trung tuyến của tam giác $ABC \Rightarrow MB = MC$.

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có

$AB = AC$ (tam giác ABC cân ở A); AM là cạnh chung;

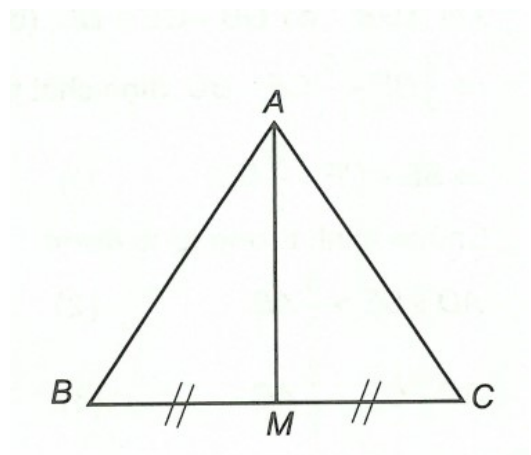
$MB = MC$.

Do đó $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



Hay $AM \perp BC$ (điều phải chứng minh).

b) Ta có $BM = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$.

Áp dụng định lí Pi-ta-go vào tam giác vuông AMB ($\widehat{AMB} = 90^\circ$), ta có

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 \Rightarrow AM^2 = AB^2 - MB^2.$$

Thay $AB = 10cm$, $MB = 6cm$, ta được $AM^2 = 64$.

Suy ra $AM = 8cm$.

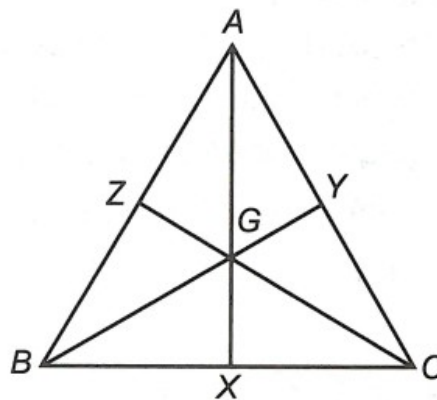
Câu 2.

Ta có $GA = \frac{2}{3}AX$; $GB = \frac{2}{3}BY$; $GC = \frac{2}{3}CZ$ (tính chất trọng tâm).

Suy ra $GX = \frac{1}{3}AX$; $GY = \frac{1}{3}BY$; $GZ = \frac{1}{3}CZ$.

Do đó $GA = 2GX$; $GB = 2GY$; $GC = 2GZ$.

Lại có $GA = GB = GC$ (giả thiết) nên $2GX = 2GY = 2GZ$
hay $GX = GY = GZ$ (điều phải chứng minh).



Câu 3.

Xét $\triangle ABC$ có AD và BE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle ABC$

Ta có $AG = \frac{2}{3}AD$; $BG = \frac{2}{3}BE$ (tính chất trọng tâm tam giác).

Thay $AD = 4,5cm$; $BE = 6cm$ vào, ta được

$$AG = 3cm; BG = 4cm.$$

Áp dụng định lí Pi-ta-go vào tam giác vuông AGB , ta có

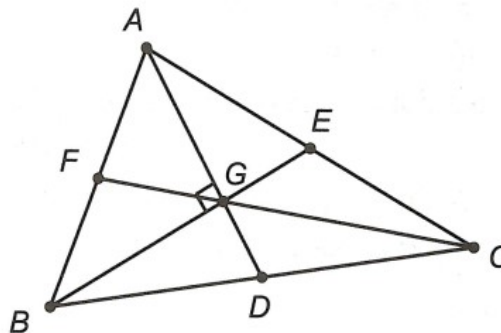
$$AB^2 = AG^2 + BG^2 \Rightarrow AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AB = 5cm.$$

Chú ý:

Gọi F là giao điểm của CG và $AB \Rightarrow FA = FB$

Ta có thể mở rộng bài toán và tính được CF

Tam giác AGB vuông tại G có trung tuyến ứng với cạnh huyền AB là $GF \Rightarrow GF = FA = FB = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}cm$.



Mà $GF = \frac{1}{3}CF$ (do G là trọng tâm $\triangle ABC$) $\Rightarrow CF = 3GF = 7,5cm$.

Câu 4.

Xét tam giác ABC có trung tuyến AD, BE, CF và trọng tâm G .

Xét $\triangle GBC$ có $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức trong tam giác)

$$\Rightarrow \frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

$$\Rightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC. (1)$$

Chúng minh tương tự ta được

$$AD + BE > \frac{3}{2}AB. (2)$$

$$AD + CF > \frac{3}{2}AC. (3)$$

Cộng (1),(2),(3) về theo về ta được

$$2(AD + BE + CF) > \frac{3}{2}(AB + BC + CA)$$

$$\Rightarrow AD + BE + CF > \frac{3}{4}(AB + BC + AC). (*)$$

Bây giờ ta cần chứng minh $AD + BE + CF < AB + BC + CA$.

Trên tia AD lấy điểm A' sao cho $DA' = DA$.

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle A'DC$ có

$$BD = CD; \widehat{ADB} = \widehat{A'DC}; AD = A'D.$$

Do đó $\triangle ADB = \triangle A'DC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = A'C$. (hai cạnh tương ứng)

Lại có $AA' < AC + A'C$ (bất đẳng thức trong tam giác $\triangle AA'C$).

Suy ra $AA' < AC + AB$ hay $2AD < AB + AC$ hay

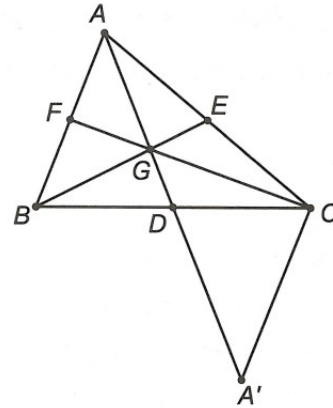
$$AD < \frac{AB + AC}{2}.$$

Chúng minh tương tự ta được $BE < \frac{AB + BC}{2}$ và

$$CF < \frac{CA + BC}{2}.$$

Cộng về theo về ba bất đẳng thức trên lại, ta có

$$AD + BE + CF < AB + BC + CA (**)$$



Từ (*) và (**) suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm tam giác

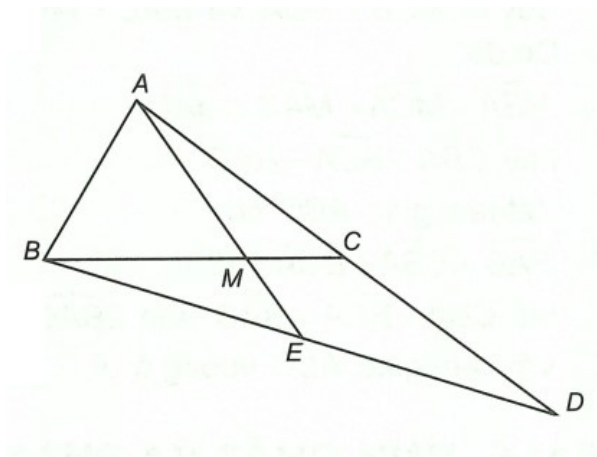
Câu 1.

a) Xét $\triangle ABD$ có $AC = CD \Rightarrow BC$ là trung tuyến của tam giác ABD .

Mà $BM = 2MC$ nên $BM = \frac{2}{3}BC$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm của tam giác ABD .

b) Vì M là trọng tâm của $\triangle ABD$ nên AM đi qua trung điểm của BD .



Câu 2.

a) Ta có $DM = DG \Rightarrow GM = 2GD$.

Ta lại có $G = BD \cap CE \Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow BG = 2GD$

Suy ra $BG = GM$.

Chứng minh tương tự ta được $CG = GN$.

b) Xét tam giác GMN và tam giác GBC có

$GM = GB$ (chứng minh trên);

$\widehat{MGN} = \widehat{BGC}$ (2 góc đối đỉnh);

$GN = GC$ (chứng minh trên).

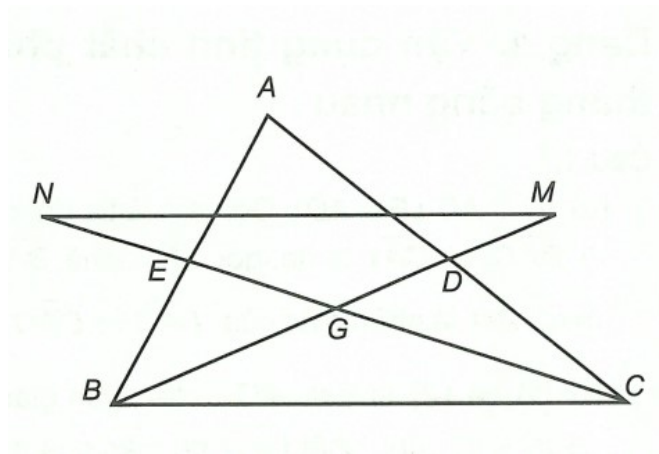
Do đó $\triangle GMN = \triangle GBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow MN = BC$ (hai cạnh tương ứng).

Theo chứng minh trên

$\triangle GMN = \triangle GBC \Rightarrow \widehat{NMG} = \widehat{CBG}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{NMG}$ và $\widehat{CBG}$ ở vị trí so le trong nên $MN \parallel BC$.



Dạng 3. Đường trung tuyến của tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông

Câu 1.

Gọi D là giao điểm của AG và $BC \Rightarrow DB = DC$.

Ta có $BG = \frac{2}{3}BE$; $CG = \frac{2}{3}CF$ (tính chất trọng tâm).

Vì $BE = CF$ nên $BG = CG \Rightarrow \triangle BCG$ cân tại G

$\Rightarrow \widehat{GCB} = \widehat{GBC}$.

Xét $\triangle BFC$ và $\triangle CEB$ có

$CF = BE$ (giả thiết); $\widehat{GCB} = \widehat{GBC}$ (chứng minh trên); BC là cạnh chung.

Do đó $\triangle BFC = \triangle CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{ECB}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.

Từ đó suy ra $\triangle ABD = \triangle ACD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC}$. (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC$

hay $AG \perp BC$.

Câu 2.

Xét $\triangle ABC$ có trung tuyến

$$AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AM = MB = MC \left(= \frac{1}{2}BC \right).$$

Khi đó tam giác AMB cân tại M và tam giác AMC cân tại M .

Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$.

Do đó

$$\widehat{MBA} + \widehat{MCA} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC}$$

$$\text{hay } \widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \widehat{BAC}.$$

Xét tam giác ABC có

$$\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{BCA} = 180^\circ.$$

Mà $\widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$ nên

$$2\widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

Vậy tam giác ABC vuông ở A .

