

CHUYÊN ĐỀ

BÀI 8. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được tính chất đường trung trực của tam giác cân.
- + Nắm được tính chất ba đường trung trực tam giác.

❖ Kỹ năng

- + Vận dụng tính chất ba đường trung trực của tam giác để giải toán.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Tính chất ba đường trung trực của tam giác

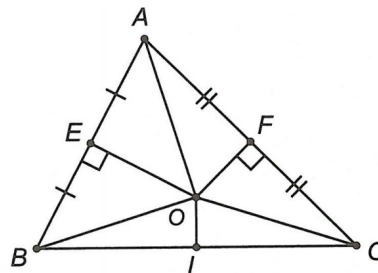
- + Trong một tam giác, đường trung trực của một cạnh được gọi là một đường trung trực của tam giác đó.
- + Ba đường trung trực của tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó. Điểm này chính là tâm đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác (ta gọi đường tròn này là đường tròn ngoại tiếp tam giác).

Đường trung trực của tam giác đặc biệt

- + Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đối diện.
- + Trong một tam giác, nếu hai trong ba đường (đường trung tuyến, đường phân giác xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó cân.

Chứng minh ba đường trung trực của tam giác cùng đi qua một điểm:

Gọi O là giao điểm của hai đường trung trực ứng với các cạnh AB và AC của $\triangle ABC$.



Vì O nằm trên đường trung trực AB nên $OA = OB$.

Vì O nằm trên đường trung trực của AC nên $OA = OC$.

Từ (1) và (2), ta có $OB = OC (= OA)$.

Suy ra O nằm trên đường trung trực của cạnh BC (tính chất đường trung trực)

Vậy ba đường trung trực của $\triangle ABC$ cùng đi qua điểm O và $OA = OB = OC$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Phương pháp giải

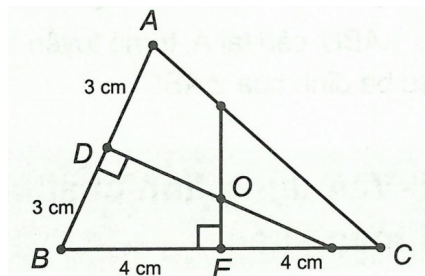
Sử dụng tính chất:

- + Giao điểm các đường trung trực trong tam giác thì cách đều ba đỉnh của tam giác đó.
 - + ba đường trung trực trong tam giác cắt nhau tại một điểm.
- Do đó để xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta đi xác định giao điểm của hai đường trung trực.

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6\text{ cm}$, $BC = 8\text{ cm}$.

Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Hướng dẫn giải



Lấy D là trung điểm của AB

$\Rightarrow BD = 3\text{ cm}$.

Qua D kẻ đường thẳng $d_1 \perp AB$.

Lấy E là trung điểm của $BC \Rightarrow BE = 4 \text{ cm}$.

Qua E kẻ đường thẳng $d_2 \perp BC$.

d_1 cắt d_2 tại O thì O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Chứng minh rằng trong tam giác vuông, giao điểm của ba đường trung trực là trung điểm của cạnh huyền.

Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$.

Gọi D là giao điểm của các đường trung trực cạnh AB và AC .

Ta có $EA = EC$. Khi đó DE cũng là đường trung tuyến $\triangle ADC$ nên $\triangle ADC$ cân tại D .

$$\Rightarrow \widehat{D}_3 = \widehat{D}_4 = 90^\circ - \widehat{C} \text{ và } AD = DC.$$

$FA = FB$ và $FD \perp AB \Rightarrow \triangle DAB$ cân tại D

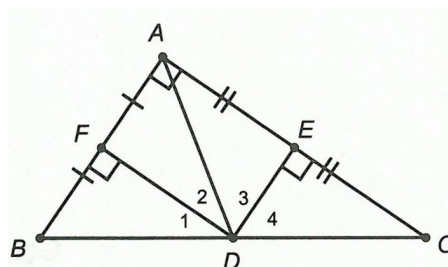
$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ - \widehat{B} \text{ và } AD = BD.$$

$$\text{Do đó } \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 + \widehat{D}_3 + \widehat{D}_4 = 2(90^\circ - \widehat{B}) + 2(90^\circ - \widehat{C})$$

$$= 2(180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}) = 2(180^\circ - 90^\circ) = 180^\circ$$

$\Rightarrow B, D, C$ thẳng hàng $\Rightarrow D$ nằm trên BC .

Mà $BD = AD$ và $AD = DC$ nên $BD = DC \Rightarrow D$ là trung điểm của BC hay giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABC$ nằm trên trung điểm cạnh huyền.



Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A}$ là góc tù. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau ở O và cắt BC theo thứ tự ở D và E .

a) Các $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ là tam giác gì?

b) Đường tròn tâm O bán kính OA đi qua những điểm nào trong hình vẽ?

Đáp án

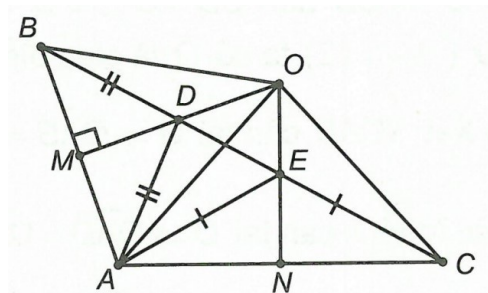
a) Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Xét $\triangle DAB$ có DM là trung trực của AB

$\Rightarrow \triangle DAB$ cân tại D

Tương tự ta có $\triangle EAC$ cân tại E .

b) Xét $\triangle OAB$ có OM là trung trực của $AB \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O



$$\Rightarrow OA = OB \quad (1)$$

Tương tự có $\triangle OAC$ cân tại $O \Rightarrow OA = OC \quad (2)$.

Từ (1) và (2), ta có $OA = OB = OC \Rightarrow$ Đường tròn tâm O bán kính OA đi qua ba điểm A, B, C .

Câu 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ là BC , khác phía với A lấy điểm D sao cho $BD \perp CD$. Hãy xác định tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.

Đáp án

Gọi O là trung điểm của BC .

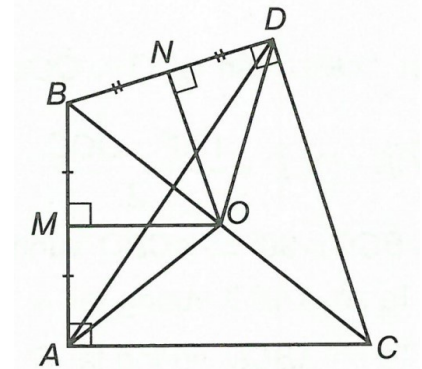
Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Theo chứng minh ở ví dụ 1 thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, ta có $OA = OB = OC \quad (1)$

Xét $\triangle DBC$ có $\widehat{BDC} = 90^\circ$ nên $OB = OC = OD \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có $OA = OB = OD$.

Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.



Câu 3: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , trung tuyến AM . Đường trung trực của AB cắt AM ở O . Chứng minh rằng điểm O cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$.

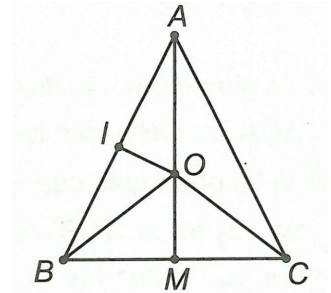
Đáp án

Xét $\triangle OAB$ vì OI là trung trực của AB nên $OA = OB \quad (1)$

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên đường trung tuyến AM đồng thời là đường trung trực của BC .

Mà đường trung trực của AB cắt AM tại O nên O là giao điểm của 3 đường trung trực.

Vậy O cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$.



Dạng 2: Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

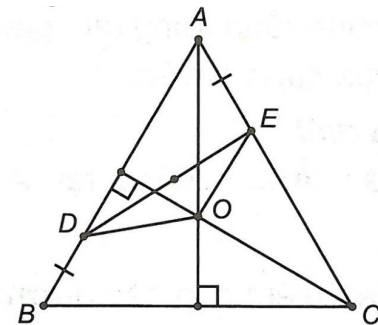
 **Phương pháp giải**

Sử dụng tính chất

Trong một tam giác, giao điểm của hai đường trung trực thuộc đường trung trực còn lại của tam giác đó.

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$ đều. Gọi D là điểm nằm giữa A và B , E là điểm nằm giữa A và C sao cho $BD = AE$. Chứng minh rằng khi D và E thay đổi trên các cạnh AB và AC thì đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp

$$\Delta ABC \Rightarrow OA = OB = OC.$$

Ta có AO là đường trung trực ứng với cạnh BC đồng thời là đường phân giác của góc A .

$$\text{Suy ra } \widehat{BAO} = \widehat{OAC} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Tương tự, ta có $\widehat{OCE} = 30^\circ$.

Vì ΔABC đều nên $AB = AC = BC$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} CE = AC - AE \\ AD = AB - BD \Rightarrow CE = AD. \\ AE = BD \end{cases}$$

Xét ΔOAD và ΔOCE

có $OA = OC$; $\widehat{OAD} = \widehat{OCE} = 30^\circ$; $CE = AD$ (chứng minh trên)

$$\Delta OAD = \Delta OCE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OD = OE$$

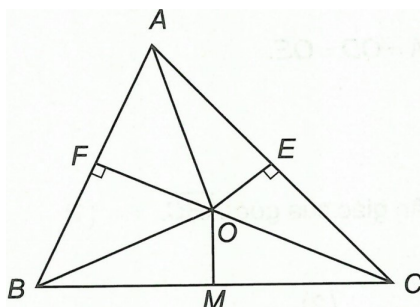
$\Rightarrow \Delta ODE$ cân tại O .

Vậy đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua điểm cố định O .

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho ΔABC , M là trung điểm của BC . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O . Tính số đo $\widehat{OMB}$.

Hướng dẫn giải



Vì OF là trung trực nên $OA = OB$.

Vì OE là trung trực nên $OA = OC$.

Suy ra $OA = OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O mà M là trung điểm BC

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của $\Delta OBC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow \widehat{OMB} = 90^\circ$.

Ví dụ 2. Cho ΔABC cân tại A , có $\widehat{A} = 50^\circ$. Đường trung trực của AB cắt BC ở D .

a) Tính $\widehat{CAD}$.

b) Trên tia đối của tia AD lấy điểm M sao cho $AM = CD$.
Chứng minh $\triangle BMD$ là tam giác cân.

Hướng dẫn giải

a) Xét $\triangle DAB$ có DH là trung trực của AB nên $\triangle DAB$ cân tại D ($H \in AB$)

$$\Rightarrow AD = BD \text{ và } \widehat{BAD} = \widehat{ABD}.$$

Ta có $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAD} - \widehat{BAC} = 65^\circ - 50^\circ = 15^\circ.$$

b) Xét $\triangle BAM$ và $\triangle ACD$ có

$$AB = AC \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A);$$

$$\widehat{BAM} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ. \quad (1)$$

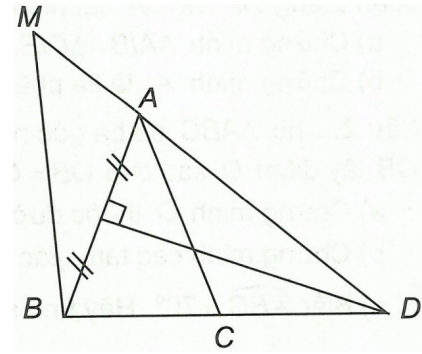
$$\widehat{DCA} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{ACD}$.

Lại có $MA = CD$.

Do đó $\triangle BAM = \triangle ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = AD$.

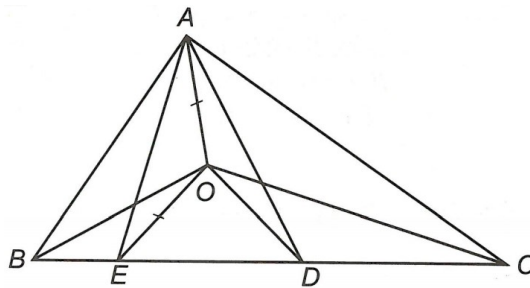
Mặt khác $AD = BD \Rightarrow BD = BM \Rightarrow \triangle BMD$ cân tại B .



Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = BA$ và $CE = CA$.

Chứng minh tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ là giao điểm của các đường phân giác của $\triangle ABC$.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE \Rightarrow OA = OD = OE$.

Xét $\triangle OBA$ và $\triangle OBD$ có

$$AB = BD, OA = OD, OB \text{ chung.}$$

Do đó $\triangle OAB = \triangle ODB$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OBD} \text{ (hai góc tương ứng)} \Rightarrow BO \text{ là phân giác của góc } \widehat{ABC}. \quad (1)$$

Tương tự ta có $\triangle OAC = \triangle OEC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OCE} \Rightarrow CO \text{ là phân giác của } \widehat{ACB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có O là giao của ba đường phân giác của $\triangle ABC$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, lấy E trên cạnh CA sao cho $CE = BA$, các đường trung trực của các đoạn thẳng BE và CA cắt nhau ở I .

- Chứng minh $\triangle AIB = \triangle CIE$.
- Chứng minh AI là tia phân giác của góc BAC .

Đáp án

a) Xét $\triangle IBE$ có IM là trung trực của $BE \Rightarrow \triangle IBE$ cân tại $I \Rightarrow IB = IE$.

Xét $\triangle IAC$ có IN là trung trực của $AC \Rightarrow \triangle IAC$ cân tại $I \Rightarrow IA = IC$.

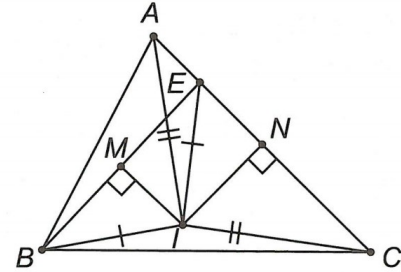
Xét $\triangle AIB$ và $\triangle CIE$ có $IA = IC$; $AB = CE$; $IB = IE$.

Do đó $\triangle AIB = \triangle CIE$ (c.c.c)

b) Vì $\triangle IAC$ cân tại I nên $\widehat{IAC} = \widehat{ICA}$. (1)

$\triangle AIB = \triangle CIE \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{ICE} = \widehat{ICA}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{IAC} = \widehat{IAB} \Rightarrow AI$ là tia phân giác của góc BAC .



Câu 2: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC . Trên tia đối của tia OB lấy điểm D sao cho $OB = OD$.

- Chứng minh O thuộc đường trung trực của AD và CD .
- Chứng minh các tam giác ABD , CBD vuông.
- Biết $\widehat{ABC} = 70^\circ$. Hãy tính số đo góc $\widehat{ADC}$?

Đáp án

a) Vì O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC nên $OA = OB = OC$.

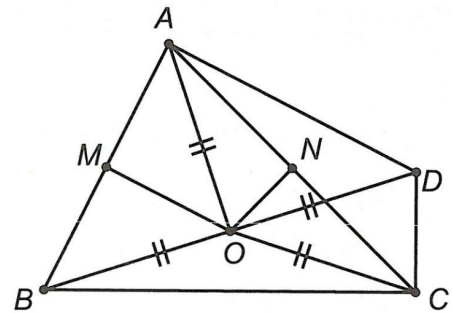
Vì $OD = OB$ nên $OD = OA \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AD . (1)

Vì $OD = OB$ nên $OD = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của CD . (2)

Từ (1) và (2) ta có O là giao điểm của ba đường trung trực tam giác ACD .

b) Xét $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2}$.

Xét $\triangle OAD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \frac{180^\circ - \widehat{AOD}}{2}$



$$\Rightarrow \widehat{OAB} + \widehat{OAD} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{AOD}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{AOB} + \widehat{AOD}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD \text{ vuông tại } A.$$

$$\text{Xét } \triangle OCD \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \frac{180^\circ - \widehat{DOC}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle OBC \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2}.$$

$$\widehat{OCB} + \widehat{OCD} = \frac{180^\circ - \widehat{DOC}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{DOC} + \widehat{BOC}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CBD \text{ vuông tại } C.$$

$$\text{c) Ta có } \triangle ABD \text{ vuông tại } A \text{ nên } \widehat{ADB} = 90^\circ - \widehat{ABD}.$$

$$\text{Ta có } \triangle BCD \text{ vuông tại } C \text{ nên } \widehat{BDC} = 90^\circ - \widehat{CBD}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ADO} + \widehat{ODC} = 180^\circ - (\widehat{ABO} + \widehat{CBO}) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 110^\circ.$$

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có O là giao điểm các đường trung trực của tam giác. Biết BO là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$. Chứng minh rằng:

- $\triangle BOA = \triangle BOC$;
- BO là đường trung trực của AC .

Đáp án

a) Vì O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $OA = OB = OC$.

$$\text{Suy ra } \triangle OAB, \triangle OBC \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}; \widehat{OBC} = \widehat{OCB}. \quad (1)$$

$$\text{Do } OB \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{ABC} \text{ nên } \widehat{OBA} = \widehat{OBC}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \widehat{AOB} = \widehat{BOC}.$$

Xét $\triangle BOA$ và $\triangle BOC$ có

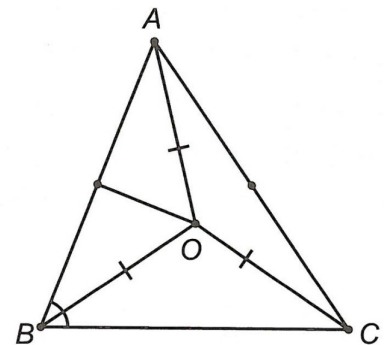
$$OA = OC; \widehat{AOB} = \widehat{BOC} \text{ và } OB \text{ chung.}$$

Do đó $\triangle BOA = \triangle BOC$ (c.g.c).

b) Vì $\triangle BOA = \triangle BOC \Rightarrow AB = BC$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \triangle BAC \text{ cân tại } B;$$

Mà OB là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ nên OB là trung trực của AC .



Câu 4: Cho $\triangle ABC$, $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Vẽ đường trung trực d của BC cắt BC tại M . Gọi E là điểm thuộc d và thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A sao cho $\widehat{EBC} = 30^\circ$. Chứng minh rằng:

- $\triangle BEC$ cân tại E ;
- $\widehat{BAC} = \widehat{ABE} + \widehat{ACE}$;

c) $\widehat{AEB} = 90^\circ$.

Đáp án

a) Xét $\triangle BEC$ có EM là trung trực của cạnh BC

$$\Rightarrow EB = EC \Rightarrow \triangle BEC \text{ cân tại } E.$$

b) Vì $\triangle BEC$ cân tại E nên $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = 30^\circ$.

$$\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{EBC} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ;$$

$$\widehat{ACE} = \widehat{ACB} - \widehat{ECB} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ;$$

Trong $\triangle ABC$ ta có $\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.

Mà $\widehat{ABE} + \widehat{ACE} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{ABE} + \widehat{ACE}$.

c) Nếu $\widehat{AEB} > 90^\circ$, trong $\triangle ABE$ có $\widehat{ABE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} = 180^\circ - \widehat{ABE} - \widehat{AEB} < 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{A_1} < \widehat{ABE} \Rightarrow AE > BE \Rightarrow AE > EC.$$

Trong $\triangle EAC$ có $AE > EC \Rightarrow \widehat{A_2} < \widehat{ACE} = 15^\circ$

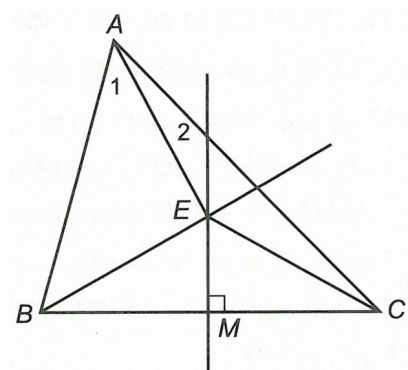
$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} < 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ.$$

Điều này vô lý vì $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 60^\circ$. (1)

Nếu $\widehat{AEB} < 90^\circ$, lập luận tương tự, ta có $AE < EC$; $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} > 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$.

Điều này vô lý vì $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 60^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AEB} = 90^\circ$.



Dạng 3: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

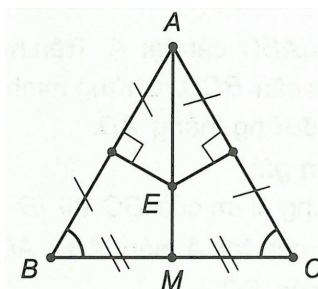
Phương pháp giải

Sử dụng tính chất: “Ba đường trung trực trong tam giác cắt nhau tại một điểm”.

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$ cân ở A . Gọi M là trung điểm của BC .

Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E . Chứng minh rằng ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MAC$ có

$$AB = AC \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A);$$

$BM = MC$ (vì M là trung điểm BC);

AM chung.

$$\Rightarrow \triangle MAB = \triangle MAC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AM$ là trung trực ứng với cạnh BC của $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ Giao điểm E của các đường trung trực phải thuộc AM hay A, E, M thẳng hàng.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho góc $\widehat{xOy} = \alpha^\circ$, A là một điểm di động ở góc trong góc đó. Vẽ các điểm M và N sao cho đường Ox là đường trung trực của AM , đường thẳng Oy là đường trung trực của AN .

a) Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tính giá trị của α để O là trung điểm của MN .

Hướng dẫn giải

a) Xét $\triangle AMN$ có Ox là trung trực của AM ;

Oy là trung trực của AN

Vậy O là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle AMN$.

Trung trực của MN luôn đi qua O cố định khi A di động

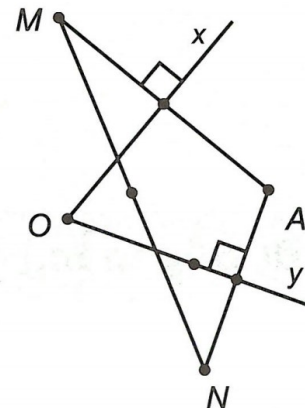
(vì 3 đường trung trực trong tam giác luôn đồng quy tại một điểm).

b) Vì O thuộc MN nên O, M, N thẳng hàng

$$\Rightarrow \widehat{xOM} + \widehat{xOA} + \widehat{yOA} + \widehat{yON} = 180^\circ.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} \widehat{xOM} = \widehat{xOA} \\ \widehat{yON} = \widehat{yOA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{xOA} + \widehat{yOA}) = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{xOy} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{xOy} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$



Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A , dựng tam giác cân BCD . Chứng minh rằng các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD .

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của BC thì $IB = IC$.

Mà $\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC \Rightarrow AI$ là trung trực của BC .

Suy ra AI là đường trung trực của BC .

Tương tự, ta có $\triangle ABD$ cân tại D nên DI là trung trực của BC .

$\Rightarrow A, D, I$ thẳng hàng hay AD là trung trực của BC .

Khi đó AD là đường trung trực của $\triangle ABC$.

Vậy các đường trung trực của AB và AC đồng quy với AD tại O .

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A , dựng tam giác cân BCD . Chứng minh rằng các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD .

Đáp án

Gọi I là trung điểm của BC thì $IB = IC$.

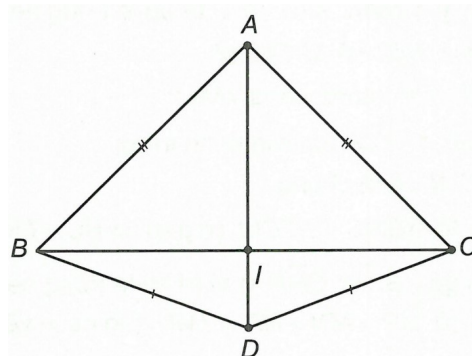
Mà $\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC \Rightarrow AI$ là trung trực của BC .

Tương tự, ta có $\triangle ABD$ cân tại D nên DI là trung trực của BC .

$\Rightarrow A, D, I$ thẳng hàng hay AD là trung trực của BC .

Khi đó AD là đường trung trực của $\triangle ABC$.

Vậy các đường trung trực của AB và AC đồng quy với AD tại O .



Câu 2: Cho $\triangle ABC$ đều. Trên các cạnh AB, BC, CA lấy theo thứ tự ba điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$.

a) Chứng minh tam giác $\triangle MNP$ là tam giác đều.

b) Gọi O là giao điểm các đường trung trực.

Đáp án

a) $\triangle ABC$ đều nên $AB = AC = BC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AP = AC - PC \\ CN = BC - BN \\ PC = BN \\ AC = BC \end{cases} \Rightarrow AP = CN.$$

Xét $\triangle MAP$ và $\triangle PCN$ có

$AM = CP$ (giả thiết); $\widehat{MAP} = \widehat{PCN} = 60^\circ$ (giả thiết); $AP = CN$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle MAP = \triangle PCN$ (c.g.c) $\Rightarrow MP = PN$ (hai cạnh tương ứng). (1)

Tương tự ta có $\triangle NBM = \triangle PCN \Rightarrow MN = PN$ (hai cạnh tương ứng). (2)

Từ (1) và (2) ta có $MN = MP = PN \Rightarrow \triangle MPN$ đều.

b) Vì O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC \Rightarrow OA = OB = OC$.

Mặt khác $\triangle ABC$ đều nên ta có $\widehat{OAM} = \widehat{OAP} = \widehat{OCP} = \widehat{OCN} = \widehat{OBN} = \widehat{OBM} = 30^\circ$.

Xét $\triangle MAO$ và $\triangle NBO$ có $MA = NB$; $\widehat{MAO} = \widehat{NBO} = 30^\circ$; $OA = OB$

$\triangle MAO = \triangle NBO$ (c.g.c) $\Rightarrow MO = NO$ (hai cạnh tương ứng). (3)

Tương tự ta có $NO = PO$. (4)

Từ (3) và (4) ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP \Rightarrow O$ là giao điểm của các đường trung trực $\triangle MNP$.

